解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　日本医科大学（前期）

【　講　評　】

例年通り，大問４題で出題された．出題形式にも変化はなかった．昨年同様，全体的に方針の立てやすい問題が多かったが，計算量が多くなり，難易度もやや上がったため得点しづらくなった．全体で 50％～55％ が得点できれば１次試験合格を勝ち取れる可能性が高いだろう．以下，大問ごとに述べる．

［Ⅰ］ベクトル／微分法(数Ⅲ)【標準】

問１は $\cos\angle\mathrm{AOB}$ の範囲を調べるだけなので問題ないだろう．問２は垂心の位置ベクトルを１次結合で表す典型問題である．内積が文字で表されるため，やや計算が面倒であるが，難易度的にここは落とせない．問３は問２が正解できていれば問題ないだろう．問４は $S(x)$ を微分して増減を調べるだけである．全体の難易度を考えると，この大問は完答したい．

［Ⅱ］二項定理／極限【標準】】

日本医科大で頻出な，確率の極限計算であった．問１は二項定理を用いるだけであるから問題ないだろう．問２は e の定義式を用いる極限計算であるが，日本医科大対策がしっかりとできていれば問題ないだろう．問３は二項係数の極限計算に戸惑って手が止まってしまった人が多いかもしれないが，変数に注目して収束する形をしっかりと作っていけばよい．問３ができれば問４はそれを用いるだけであるから，問３の出来がポイントとなるだろう．

［Ⅲ］積分法(数Ⅲ)／極限【やや難】

問１は有名な定積分計算，問２は e の定義式を用いる極限計算で，どちらも落とせない問題である．問３は入試で頻出な減衰曲線に関する定積分の問題であるが，文字が多く操作も多いため，慣れていない人にとっては完答が難しい．この問題を完答できるくらいの計算力，手際の良さを身につけておいてもらいたい．問４は問３の形を意識してはさみうちの原理を用いる．日本医科大の頻出テーマであるが，難易度が高いこともあり，完答できる必要はないだろう．

［Ⅳ］２次曲線／空間座標／微分法(数Ⅲ)／２次関数【やや難】

問１は双曲線の接線公式を用いるだけである．問２は昨年に続き，平面の方程式を求める問題である．ただし，法線ベクトルなどを求める必要はなく，誘導にしたがって y の係数を求めるだけであるから，ここは正解したい．問３も線分の長さを求めるだけであるが，特にST の計算が煩雑である．制限時間との勝負になるだろう．問３ができれば，問４は極値の存在条件を，２次方程式の解の配置に帰着させて考察するだけであるが，難易度を考えると，ここも完答できる必要はないだろう．

【　解　　答　】

［Ⅰ］

問1　ア：0,　　イ：$\dfrac{2}{3}$

問2　ウ：3,　　エ：2,　　オ：2,　　カ：2,　　キ：3,　　ク：3

問3　ケ：6,　　コ：13,　　サ：6,　　シ：2

問4　ス：(い)

［Ⅱ］

問1　ア：$m+2n$，　イ：$m+n$，　ウ：m

問2　e^{n}

問3　$\dfrac{n^{k}}{k!e^{n}}$

問4　$\dfrac{1}{24}$　(解説参照)

［Ⅲ］

問1　$\dfrac{e^{-a\pi}+1}{a^{2}+1}$

問2　b

問3　$\dfrac{ne^{-n\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)(1-e^{-\pi})}{(n^{2}+1)\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)}$

問4　$\dfrac{2(1-e^{-\pi})}{\pi}$　(解説参照)

［Ⅳ］

問1　ア：$-t$,　　イ：$\sqrt{1+t^{2}}$

問2　ウ：$\sqrt{k}$

問3　$\mathrm{QR}=2\sqrt{1+2t^{2}}$，　$\mathrm{ST}=\dfrac{2(k+t^{2})\sqrt{k+1}}{k(k^{2}+k+t^{2})}$

問4　$k>4+2\sqrt{3}$　(解説参照)

【　解　説　】

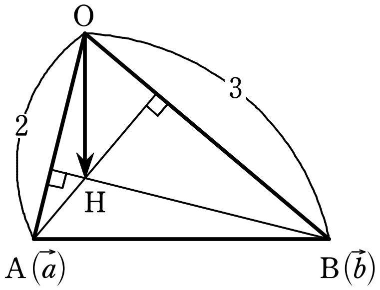
［Ⅰ］

問１　$\cos x$ は$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調減少であるから，$0<\alpha<\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\cos\alpha>\cos\angle\mathrm{AOB}>\cos\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\quad 0<x<\frac{2}{3}_{\text{（アイ）}}$$

問２　$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=x$ より，

$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cdot x=6x$$



ある実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と表せるので，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\end{cases}\iff\begin{cases}\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot\vec{b}=0\\ \{s\vec{a}+(t-1)\vec{b}\}\cdot\vec{a}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}(s-1)\cdot6x+9t=0\\ 4s+(t-1)\cdot6x=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}2xs+3t=2x&\cdots\cdots①\\ 2s+3xt=3x&\cdots\cdots②\end{cases}$$

①$\times x-$② より，　$2(x^2-1)s=x(2x-3)$

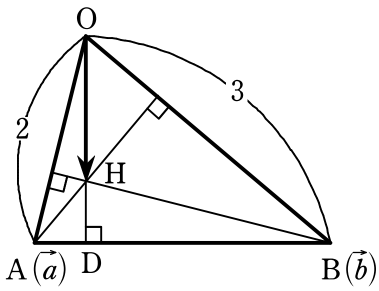
$0<x<\dfrac{2}{3}$ より $1-x^2\neq0$ であるから，　$s=\dfrac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}$

①$-$②$\times x$ より，　$3(1-x^2)t=x(2-3x)$　　$\therefore\quad t=\dfrac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}$

以上から，　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（ウエオカキク）

問３　OからABへ垂線ODを下ろすと，ある実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



と表せ，点Dが直線AB上であることから，

$$\frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}k+\frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}k=1$$

$$\therefore\quad k=\frac{1}{\dfrac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}+\dfrac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}}=\frac{6(1-x^2)}{3x(3-2x)+2x(2-3x)}=\frac{6-6x^2}{13x-12x^2}$$

よって，　$\mathrm{OD}:\mathrm{HD}=k:(k-1)=\dfrac{6-6x^2}{13x-12x^2}:\dfrac{6-6x^2-(13x-12x^2)}{13x-12x^2}=(6-6x^2):(6-13x+6x^2)$

以上から，三角形HABの面積は，

$$S(x)=\frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{OD}}\cdot(\text{三角形OABの面積})=\frac{6-13x+6x^2}{6-6x^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\frac{6x^2-13x+6}{12(1-x^2)}\sqrt{4\cdot9-(6x)^2}=\frac{6x^2-13x+6}{2(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}$$

$$=\frac{6x^2-13x+6}{2\sqrt{1-x^2}}\ \text{（ケコサシ）}$$

問 4　$S'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(12x-13)\sqrt{1-x^2}-(6x^2-13x+6)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(12x-13)(1-x^2)+(6x^2-13x+6)x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-6x^3+18x-13}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

ここで，$f(x)=-6x^3+18x-13$ とすると，$0<x<\dfrac{2}{3}$ において，

$$(1-x^2)\sqrt{1-x^2}>0$$

であるから，$S'(x)$ と $f(x)$ の符号は一致する．

$$f'(x)=-18x^2+18=18(1-x^2)>0$$

より，$0<x<\dfrac{2}{3}$ において $f(x)$ は単調に増加し，

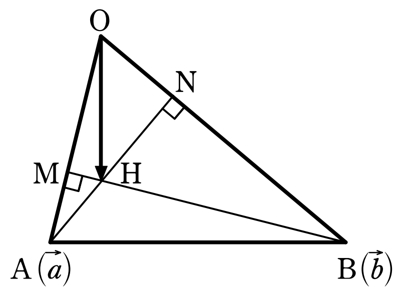
$$f\left(\frac{2}{3}\right)=-6\left(\frac{2}{3}\right)^3+18\cdot\frac{2}{3}-13=-\frac{16}{9}-1<0$$

であるから，$0<x<\dfrac{2}{3}$ で $f(x)<0$ となる．

以上から，$0<x<\dfrac{2}{3}$ で $S'(x)<0$ であり，$S(x)$ は（い）**単調に減少する**(ス)．

別解　問 2 は正射影ベクトルを用いてもよい．

B から OA へ垂線 OM，A から OB へ垂線 AN を下ろす．



$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{6x}{2^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{3}{2}x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ への正射影ベクトルであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{6x}{3^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{3}x\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって，$\mathrm{OM}:\mathrm{MA}=\dfrac{3}{2}x:1-\dfrac{3}{2}x=3x:2-3x$，$\mathrm{ON}:\mathrm{NB}=\dfrac{2}{3}x:1-\dfrac{2}{3}x=2x:3-2x$ であるから，

△OAN と直線 BM にメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HN}}\cdot\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{BO}}\cdot\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MA}}=1$$

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HN}}=\frac{3}{3-2x}\cdot\frac{2-3x}{3x}=\frac{2-3x}{x(3-2x)}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{x(3-2x)}{2-2x^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2-3x}{2-2x^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=\frac{x(3-2x)}{2(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{x(2-3x)}{3(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$(ウエオカキク)

[Ⅱ]

問１　反復試行であるから，　$p_{m,\ n}(k)={}_m\mathrm{C}_k\left(\dfrac{n}{m+n}\right)^k\left(\dfrac{m}{m+n}\right)^{m-k}$　……①

二項定理を用いると，

$$q_{m,n}=\sum_{k=0}^{m}2^k\cdot p_{m,\ n}(k)=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k\left(\frac{2n}{m+n}\right)^k\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-k}=\left(\frac{2n}{m+n}+\frac{m}{m+n}\right)^m$$
$$=\left(\boldsymbol{\frac{m+2n}{m+n}}\right)^{\boldsymbol{m}}\ \text{（アイウ）}$$

問２　$R_n=\lim\limits_{m\to\infty}q_{m,n}=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{m+2n}{m+n}\right)^m=\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{n}{m+n}\right)^m$

$$==\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1+\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{m+n}{n}}\right\}^n\cdot\left(1+\frac{n}{m+n}\right)^{-n}$$
$$=e^n\cdot(1+0)^{-n}=\boldsymbol{e^n}$$

問３　①より，

$$p_{m,\ n}(k)=\frac{m\cdot(m-1)\cdot\ \cdots\ \cdot(m-k+1)}{k!}\cdot\frac{n^km^{m-k}}{(m+n)^m}=\frac{n^k}{k!}\cdot\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{\left(1+\frac{n}{m}\right)^m}$$
$$=\frac{n^k}{k!}\cdot\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{\left\{\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}^n}$$

よって，　$S_n(k)=\lim\limits_{m\to\infty}p_{m,n}(k)=\boldsymbol{\dfrac{n^k}{k!e^n}}$

問４　問２，３から，

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N}R_n\cdot S_n(3)\right\}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N}e^n\cdot\frac{n^3}{3!e^n}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{6N^4}\sum_{n=1}^{N}n^3\right)\quad\cdots\cdots②$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{6N^4}\cdot\frac{N^2(N+1)^2}{4}\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{24}}$$

別解　②の計算は，区分求積法を用いてもよい．

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{6N^4}\sum_{n=1}^{N}n^3\right)=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n}{N}\right)^3\frac{1}{N}\right\}=\frac{1}{6}\int_0^1x^3dx=\frac{1}{6}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{24}}$$

[Ⅲ]

問 1　部分積分法を 2 回用いると,

$$K(a)=\Big[-e^{-ax}\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}(-ae^{-ax}\cos x)dx=e^{-a\pi}+1-a\int_0^{\pi}e^{-ax}\cos x\,dx$$

$$=e^{-a\pi}+1-a\Big[e^{-ax}\sin x\Big]_0^{\pi}+a\int_0^{\pi}(-ae^{-ax}\sin x)dx$$

$$=e^{-a\pi}+1-a^2K(a)$$

$$\therefore\quad K(a)=\boldsymbol{\frac{e^{-a\pi}+1}{a^2+1}}$$

問 2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\frac{b}{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{b}{n}}-1}{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{b}{n}}-1}{-\frac{b}{n}}\cdot b=1\cdot b=\boldsymbol{b}$

問 3　$nx=t$ と置換すると,

$$I_n=\int_{n^2\pi}^{n(n+1)\pi}e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\frac{dt}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=n^2}^{n(n+1)-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|dt$$

さらに $t-k\pi=s$ と置換すると,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\,ds=\int_0^{\pi}e^{-\frac{s+k\pi}{n}}|\sin(s+k\pi)|\,ds=e^{-\frac{\pi}{n}k}\cdot\int_0^{\pi}e^{-\frac{s}{n}}|(-1)^k\cdot\sin s|\,ds$$

$$=e^{-\frac{\pi}{n}k}\int_0^{\pi}e^{-\frac{s}{n}}\sin s\,ds=e^{-\frac{k}{n}\pi}\cdot K\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=e^{-\frac{\pi}{n}k}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}+1}{\frac{1}{n^2}+1}=e^{-\frac{\pi}{n}k}\cdot\frac{n^2\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)}{n^2+1}$$

よって,

$$I_n=\frac{1}{n}\sum_{k=n^2}^{n^2+n-1}e^{-\frac{\pi}{n}k}\cdot\frac{n^2\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)}{n^2+1}=\frac{n\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)}{n^2+1}\sum_{k=n^2}^{n^2+n-1}e^{-\frac{\pi}{n}k}$$

$$=\frac{n\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)}{n^2+1}\cdot\frac{e^{-n\pi}\left\{1-\left(e^{-\frac{\pi}{n}}\right)^n\right\}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}=\boldsymbol{\frac{ne^{-n\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)(1-e^{-\pi})}{(n^2+1)\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)}}$$

問 4　$0\leqq|\cos(nx)|\leqq1$ より,

$$\frac{|\sin(nx)|}{e^x+1}\leqq\frac{|\sin(nx)|}{e^x+|\cos(nx)|}\leqq\frac{|\sin(nx)|}{e^x}$$

$$\frac{e^x}{e^x+1}\cdot e^{-x}|\sin(nx)|\leqq\frac{|\sin(nx)|}{e^x+|\cos(nx)|}\leqq e^{-x}|\sin(nx)|$$

ここで,

$$\frac{e^x}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$$

は増加関数であるから，$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ において,　$\displaystyle\frac{e^x}{e^x+1}\geqq\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}$

よって，$n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ において，

$$\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{-x}|\sin(nx)| \leqq \frac{|\sin(nx)|}{e^{x}+|\cos(nx)|} \leqq e^{-x}|\sin(nx)|$$

が成り立つから，各辺を $n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ で定積分すると，

$$\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}I_n \leqq J_n \leqq I_n$$

各辺に $e^{n\pi}$ をかけて，

$$\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1}\cdot e^{n\pi}I_n \leqq e^{n\pi}J_n \leqq e^{n\pi}I_n$$

ここで問3より，

$$e^{n\pi}I_n = \frac{n\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)(1-e^{-\pi})}{(n^2+1)\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)} = \frac{\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)(1-e^{-\pi})}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\cdot\frac{1}{n\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)}$$

であるから，$b=\pi$ として問2を用いると，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{n\pi}I_n = \frac{(e^0+1)(1-e^{-\pi})}{1+0}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{2(1-e^{-\pi})}{\pi}$

また，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\pi}}{e^{n\pi}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^{n\pi}}} = 1$

したがって，はさみうちの原理から，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{n\pi}J_n = \frac{2(1-e^{-\pi})}{\pi}$

［Ⅳ］

問 1　$C_1 : z^2-x^2=1$ の点 $\mathrm{P}\left(t,\ 0,\ \sqrt{1+t^2}\right)$ における接線が L_1 であるから，zx 平面内の直線 L_1 の方程式は,

$$\sqrt{1+t^2}\cdot z-t\cdot x=1 \qquad \therefore\ -tx+\sqrt{1+t^2}\,z=1_{(アイ)} \quad \cdots\cdots①$$

問 2　$k>0$ より，　$C_2 : k^2x^2+\dfrac{k^2}{k+1}y^2=1 \iff \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{k}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{k+1}}{k}\right)^2}=1$

$\dfrac{1}{k}<\dfrac{\sqrt{k+1}}{k}$ に注意すると，この楕円の焦点は y 軸上に存在し,

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{k+1}}{k}\right)^2-\left(\frac{1}{k}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{k}}$$

であるから，y 座標が正である焦点 F の座標は,　$\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{k}},\ 0\right)$

平面 $-tx+ay+\sqrt{1+t^2}\,z=1$ を考えると，これは $y=0$ のとき（zx 平面で）①となるため，直線 L_1 を含む平面

である．この平面が点 F を通るとき，　$a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{k}}=1 \qquad \therefore\ a=\sqrt{k}$

したがって，平面 π の方程式は,　$-tx+\sqrt{k}\,y+\sqrt{1+t^2}\,z=1_{(ウ)}$ ……②

問 3　①と $x=z$ を連立して,　$-tx+\sqrt{1+t^2}\,x=1 \qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}=\sqrt{1+t^2}+t$

よって,　$\mathrm{Q}\left(\sqrt{1+t^2}+t,\ 0,\ \sqrt{1+t^2}+t\right)$

① と $x=-z$ を連立して,　$-tx-\sqrt{1+t^2}\,x=1 \qquad \therefore\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}=t-\sqrt{1+t^2}$

よって,　$\mathrm{R}\left(t-\sqrt{1+t^2},\ 0,\ \sqrt{1+t^2}-t\right)$

以上から,

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=\sqrt{\left\{\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)-\left(t-\sqrt{1+t^2}\right)\right\}^2+\left\{\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)-\left(\sqrt{1+t^2}-t\right)\right\}^2}=\sqrt{4(1+t^2)+4t^2}\\&=2\sqrt{1+2t^2}\end{aligned}$$

また，直線 L_2 の方程式は，②に xy 平面の方程式 $z=0$ を代入して,　$-tx+\sqrt{k}\,y=1$

$k>0$ より，　$y=\dfrac{tx+1}{\sqrt{k}}$ ……③

これを C_2 の方程式に代入すると,

$$k^2x^2+\frac{k^2}{k+1}\cdot\frac{(tx+1)^2}{k}=1$$

$$k^2(k+1)x^2+k(tx+1)^2=k+1 \qquad \therefore\ k(k^2+k+t^2)x^2+2ktx-1=0$$

この方程式の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4}=(kt)^2-k(k^2+k+t^2)\cdot(-1)=k^2t^2+k^3+k^2+kt^2=k(kt^2+k^2+k+t^2)>0$$

よって，異なる 2 解をもつから，これらを $x=\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により,

$$\alpha+\beta=-\frac{2kt}{k(k^2+k+t^2)},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{k(k^2+k+t^2)}$$

したがって，③の傾きに注目すると，

$$\mathrm{ST}=\sqrt{1+\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^2}|\beta-\alpha|=\sqrt{1+\frac{t^2}{k}}\sqrt{(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{1+\frac{t^2}{k}}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{1+\frac{t^2}{k}}\sqrt{\left\{\frac{-2kt}{k(k^2+k+t^2)}\right\}^2-4\cdot\frac{-1}{k(k^2+k+t^2)}}$$

$$=2\sqrt{1+\frac{t^2}{k}}\cdot\frac{\sqrt{k^2t^2+k(k^2+k+t^2)}}{k(k^2+k+t^2)}$$

$$=\frac{2\sqrt{(k+t^2)\{k^2+(t^2+1)k+t^2\}}}{k(k^2+k+t^2)}=\frac{2\sqrt{(k+t^2)\{(k+t^2)(k+1)\}}}{k(k^2+k+t^2)}$$

$$=\frac{\boldsymbol{2(k+t^2)\sqrt{k+1}}}{\boldsymbol{k(k^2+k+t^2)}}$$

問 4　問3から，　$f_k(t)=\dfrac{\mathrm{ST}}{\mathrm{QR}}=\dfrac{\sqrt{k+1}\,(t^2+k)}{k(t^2+k^2+k)\sqrt{2t^2+1}}$

$t^2=T$ とおき，　$f_k(t)=\dfrac{\sqrt{k+1}}{k}\cdot\dfrac{T+k}{(T+k^2+k)\sqrt{2T+1}}=\dfrac{\sqrt{k+1}}{k}g(T)$　とすると，

$$g'(T)=\frac{(T+k^2+k)\sqrt{2T+1}-(T+k)\cdot\left\{\sqrt{2T+1}+(T+k^2+k)\cdot\dfrac{2}{2\sqrt{2T+1}}\right\}}{(T+k^2+k)^2(2T+1)}$$

$$=\frac{(T+k^2+k)(2T+1)-(T+k)\{(2T+1)+T+k^2+k\}}{(T+k^2+k)^2(2T+1)\sqrt{2T+1}}$$

$T\geqq 0$ より，$(T+k^2+k)^2(2T+1)\sqrt{2T+1}\geqq 0$ であるから，

$$g'(T)=0 \iff k^2(2T+1)-(T+k)(T+k^2+k)=0$$

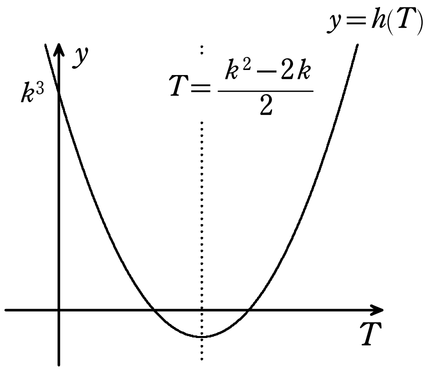
$$\iff T^2+(2k-k^2)T+k^3=0$$

$f_k(t)$ が極値を持つための必要十分条件は，この2次方程式が $T>0$ の範囲で重解でない実数解を持つことである．

左辺を $h(T)$ とすると，　$h(0)=k^3>0$

したがって，求める条件は，

$$\begin{cases}\text{軸}\quad :\dfrac{k^2-2k}{2}>0 & \cdots\cdots④\\ \text{判別式}: D=(2k-k)^2-4k^3>0 & \cdots\cdots⑤\end{cases}$$



$k>0$ に注意すると④より，　$k>2$

また，⑤から　$k^2-8k+4>0$　　$\therefore$　$k<4-2\sqrt{3}$，$k>4+2\sqrt{3}$

これらの共通部分を考えると，　$\boldsymbol{k>4+2\sqrt{3}}$