解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　昭和大学Ⅰ期

【　講　評　】

例年通り，大問4題で出題された．昨年と同様，小問集合は1題であった．手のつけられないような難問は出題されなかったが，類題を解いた経験の有無で大きく解きやすさが変わる問題のセットであった．全体で70％以上の得点ができればよいだろう．以下，大問ごとに特徴を述べる．

$\boxed{1}$　小問集合（数列の極限／数列）　【標準】

(1)はフィボナッチ数列に関する漸化式，極限の問題で，(2)は有名な数列和の問題であった．どちらも類題を解いた経験のある人が多いだろうから，計算ミスに気を付けて確実に得点したい問題である．なお，(2)は2012年日本医科大で出題された問題と同じである．

$\boxed{2}$ ベクトル／三角関数【標準】

立方体(問題文の図は直方体)の切断面に関する問題であった．図形的に処理することもできるが，空間座標に当てはめてベクトルで処理するのが最善である．このことに気づければ，あとは三角関数の計算問題である．なお，2014年東京大学文系で出題された問題とほぼ同じである．

$\boxed{3}$ 積分法（数学Ⅲ）【やや難】

球の通過領域の体積を求める有名問題である．球の断面は円であるから，(1)～(3)で円の通過領域の面積を求めることになる．(3−1)の円の通過しない領域の面積を求めるときに，(2)で求めた内接円の半径がヒントになっていることに気づけたかがポイントである．(3)が解ければ(4)は解けるであろう．ただし，試験時間を考慮すれば，完答する必要はない問題である．

$\boxed{4}$ 確率【やや易】

トランプの取り出し方に関する確率の問題であった．事象も単純なので，完答したい問題である．

【　解　答　】

$\boxed{1}$ (1)(1−1)　$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=4$，$a_4=7$，　(1−2)　$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，　(1−3)　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2)(2−1)　$\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$，　(2−2)　$\dfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$，　(2−3)　$\dfrac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$

$\boxed{2}$ (1)　$\dfrac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}$，　(2)　$\sqrt{1+\tan^2\alpha\tan^2\beta}$，　(3)(3−1)　$\dfrac{5}{6}$，　(3−2)　$\dfrac{1}{6}$

$\boxed{3}$ (1)　$6\sqrt{6}$，　(2)　$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，　(3)(3−1)　$6\sqrt{6}\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{4}t\right)^2$，　(3−2)　$\left(\pi-\dfrac{9}{4}\sqrt{6}\right)t^2+36t$，

(4)　$\dfrac{58}{3}\pi-3\sqrt{6}$

$\boxed{4}$ (1)　$\dfrac{2}{11}$，　(2)　$\dfrac{36}{35}$，　(3)　$\dfrac{9}{55}$，　(4)　$\dfrac{32}{55}$，　(6)　$\dfrac{4}{55}$

【　解　説　】

1

(1)　α, β は $x^2-x-1=0$ の解であるから，解と係数の関係により，

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-1$$

これを用いると，$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=\alpha^n+\beta^n=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})\\&=1\cdot a_{n-1}-(-1)\cdot a_{n-2}\\&=a_{n-1}+a_{n-2}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

が成り立つ.

(1−1)　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ より，

$$a_1=\alpha+\beta=1,$$

$$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=3,$$

以降は ① を用いると，

$$a_3=a_2+a_1=3+1=4,$$

$$a_4=a_3+a_2=4+3=7$$

(1−2)　$n\geqq 3$ のとき ① より，　$a_n=\boldsymbol{a_{n-1}+a_{n-2}}$　が成り立つ.

(1−3)　$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\frac{\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+\beta}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}$$

$x^2-x-1=0$ より　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha<\beta$ であるから　$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，$-1<\alpha<0<\beta$ であるから，　$-1<\dfrac{\alpha}{\beta}<0$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+\beta}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}=\frac{\alpha\cdot 0+\beta}{0+1}=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

別解　(1−2) の漸化式は次のように導くこともできる.

α は $x^2-x-1=0$ の解であるから，　$\alpha^2-\alpha-1=0$

$n\geqq 3$ のとき，両辺に α^{n-2} をかけると，　$\alpha^n-\alpha^{n-1}-\alpha^{n-2}=0$　$\cdots\cdots②$

β についても同様にすると，　$\beta^n-\beta^{n-1}-\beta^{n-2}=0$　$\cdots\cdots③$

②＋③ より　$\alpha^n+\beta^n-(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=0$

$a_n=\alpha^n+\beta^n$ であるから　$a_n-a_{n-1}-a_{n-2}]=0$　　$\therefore$　$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

参考 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が収束することを認めれば，次のように解くこともできる．

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$ とおくと，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ より

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}} \qquad \therefore \quad b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n} \quad \cdots\cdots ④$$

$\lim_{n\to\infty}b_n$ が収束するとき，$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=p$ となる実数 p が存在するから，④の両辺の極限を考えると，

$$p=1+\frac{1}{p}$$

$$p^2-p-1=0 \qquad \therefore \quad p=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$b_n>1$ であるから，$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(2)(2−1) $S_1=1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3+\cdots\cdots+1\cdot n$

$$+2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+2\cdot n$$
$$+3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+\cdots\cdots+3\cdot n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+n\cdot1+n\cdot2+n\cdot3+\cdots\cdots+n\cdot n$$

$$=1\cdot(1+2+3+\cdots\cdots+n)+2\cdot(1+2+3+\cdots\cdots+n)+3\cdot(1+2+3+\cdots\cdots+n)+\cdots$$
$$\cdots+n\cdot(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=(1+2+3+\cdots\cdots+n)(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

(2−2) 整数の組 $(j,\ k)$ には，$j>k$，$j<k$，$j=k$ を満たすものがあり，$j>k$，$j<k$ を満たすものの総和はそれぞれ等しいから，S_1 から $j=k$ を満たすものの総和を引いたものを2等分したものが S_2 である．したがって，

$$S_2=\frac{1}{2}\{S_1-(1^2+2^2+3^3+\cdots\cdots+n^2)\}=\frac{1}{2}\left(S_1-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)}$$

(2−3) $j<k \iff j=k-1$ または $j<k-1$ であるから，S_2 から $j=k-1$ を満たすものの総和を引いたものが S_3 である．

$j=k-1$ を満たすものの総和を S_4 とすると，

$$S_4=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)n$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$$
$$=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

よって，

$$S_3 = S_2 - S_4 = \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$
$$= \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)\{(3n+2)-8\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)}$$

別解　S_4 は次のように計算してもよい．

$(k-1)k(k+1) - k(k+1)(k+2) = 3k(k+1)$ より　　$k(k+1) = \frac{1}{3}\{(k-1)k(k+1) - k(k+1)(k+2)\}$

よって，　$S_4 = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k-1)k(k+1) - k(k+1)(k+2)\}$

$$= \frac{1}{3}\{0-(n-1)n(n+1)\}$$
$$= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

補足　次のような表がイメージできていると和が求めやすいだろう．

$j \backslash k$	1	2	3	……	$n-1$	n
1	$1\cdot1$	$1\cdot2$	$1\cdot3$	……	$1\cdot(n-1)$	$1\cdot n$
2	$2\cdot1$	$2\cdot2$	$2\cdot3$	……	$2\cdot(n-1)$	$2\cdot n$
3	$3\cdot1$	$3\cdot2$	$3\cdot3$	……	$3\cdot(n-1)$	$3\cdot n$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
$n-1$	$(n-1)\cdot1$	$(n-1)\cdot2$	$(n-1)\cdot3$	……	$(n-1)^2$	$(n-1)\cdot n$
n	$n\cdot1$	$n\cdot1$	$n\cdot2$	……	$n\cdot(n-1)$	n^2

2

(1)　O を原点，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 1)$ となるように空間座標をとると，
$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$，$\beta=\angle\mathrm{COR}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 0,\ \tan\alpha),\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 1,\ \tan\beta)$$

と表せる.

よって，$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\boldsymbol{\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}}$$

(2)　切断面 OPQR は平行四辺形で，面積は △OPQ の 2 倍であるから，

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}\\&=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}\\&=\boldsymbol{\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}\end{aligned}$$

(3)　$\tan\alpha+\tan\beta=x$，$\tan\alpha\tan\beta=y$ とおく.

$S=\dfrac{7}{6}$ であるから，(2) より

$$\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}=\frac{7}{6}$$

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}\qquad\therefore\quad x^2-2y=\frac{13}{36}\quad\cdots\cdots①$$

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1\qquad\therefore\quad y=1-x\quad\cdots\cdots②$$

② を ① に代入すると，

$$x^2-2(1-x)=\frac{13}{36}$$

$$x^2+2x-\frac{85}{36}=0\qquad\therefore\quad \left(x+\frac{17}{6}\right)\left(x-\frac{5}{6}\right)=0$$

$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より $x=\tan\alpha+\tan\beta>0$ であるから，

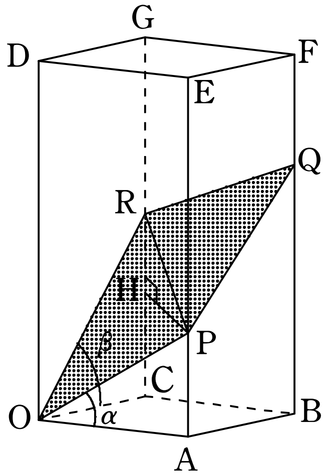
$$x=\tan\alpha+\tan\beta=\boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

これを ② に代入すると，

$$y=\tan\alpha\tan\beta=1-\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

別解　$\cos\gamma$ は図形的に求めることもできる.

直角三角形 OAP において， $\angle \mathrm{AOP}=\alpha$ であるから,



$$\mathrm{OP}=\frac{\mathrm{OA}}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sqrt{1+\tan^2\alpha},\quad \mathrm{AP}=\mathrm{OA}\tan\alpha=\tan\alpha$$

また，直角三角形 OCR において， $\angle \mathrm{COR}=\beta$ であるから,

$$\mathrm{OR}=\frac{\mathrm{OC}}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\beta}=\sqrt{1+\tan^2\beta},\quad \mathrm{CR}=\mathrm{OC}\tan\beta=\tan\beta$$

P から CR へ垂線 PH を下ろすと，　$\mathrm{PH}=\mathrm{AC}=\sqrt{2}$

また， $\mathrm{CH}=\mathrm{AP}$ であるから,

$$\mathrm{RH}=|\mathrm{CR}-\mathrm{CH}|=|\mathrm{CR}-\mathrm{AP}|=|\tan\beta-\tan\alpha|$$

直角三角形 PRH に三平方の定理を用いると,

$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{PH}^2+\mathrm{RH}^2=2+(\tan\beta-\tan\alpha)^2$$

したがって，△POR に余弦定理を用いると,

$$\cos\gamma=\frac{\mathrm{OP}^2+\mathrm{OR}^2-\mathrm{PR}^2}{2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}}=\frac{1+\tan^2\alpha+1+\tan^2\beta-\{2+(\tan\beta-\tan\alpha)^2\}}{2\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}$$

3

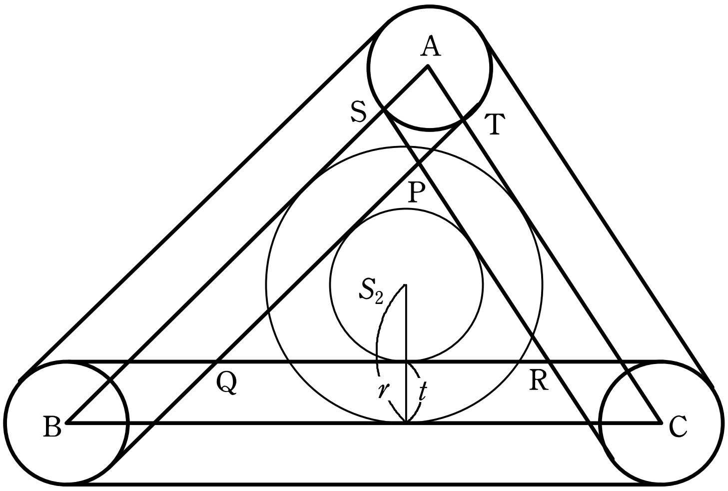
(1)　$s=\dfrac{6+7+5}{2}=9$ とすると，ヘロンの公式により，

$$S_1=\sqrt{s(s-6)(s-7)(s-5)}=\sqrt{9\cdot3\cdot2\cdot4}=6\sqrt{6}$$

(2)　△ABCの面積に注目すると，　$S_1=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$

よって，　$6\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}r(6+7+8)$　　∴　$r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

(3)(3−1)　図のようにP，Q，R，S，Tをとると，円Eが通過しない部分は△PQRである.



AB∥PQ，BC∥QR，CA∥RPであるから

△ABC∽△PQR　(∵ 2角相等)

このときの相似比は内接円の半径の比に等しい.

四角形ASPTは平行四辺形であるから，その対角線APは∠Aの二等分線である.

同様のことが∠B，∠Cについてもいえるから，△ABCと△PQRの内接円の中心は一致する.

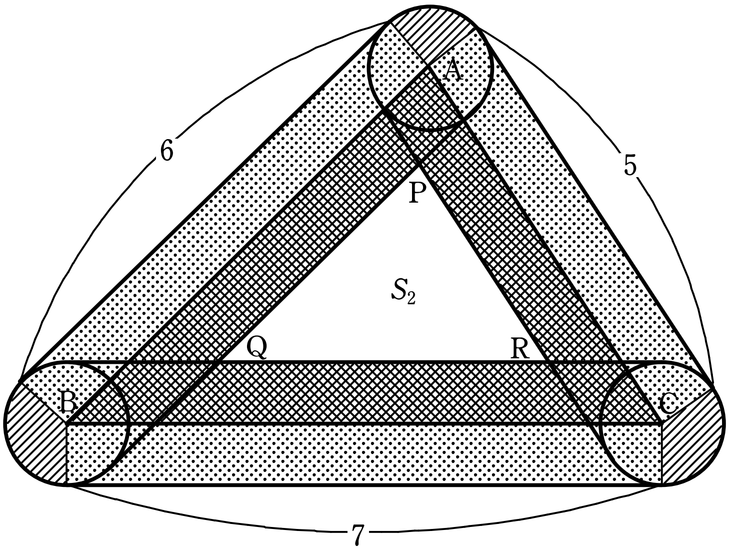
よって，△ABCと△PQRの相似比は，

$$r:r-t=\frac{2\sqrt{6}}{3}:\frac{2\sqrt{6}}{3}-t=1:1-\frac{\sqrt{6}}{4}t$$

したがって，

$$S_2=\left(1-\frac{\sqrt{6}}{4}t\right)^2S_1=6\sqrt{6}\left(1-\frac{\sqrt{6}}{4}t\right)^2$$

(3−2)　円Eが通過する部分の面積 S_3 は，△ABCの面積 S_1 から△PQRの面積 S_2 を引いたもの（図の網目部分）に，3つの扇形（図の斜線部分）と，3つの長方形（図の打点部分）の面積を足したものである．



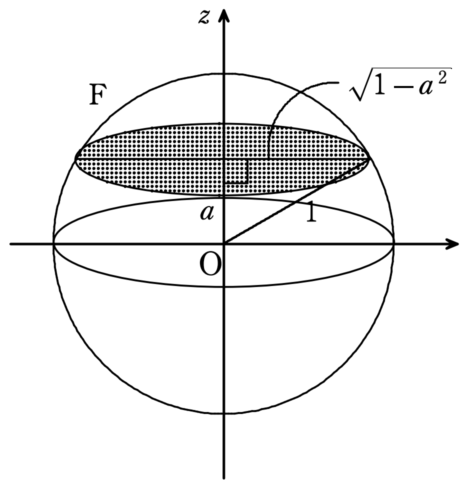
3つの扇形の面積の合計は，半径 t の円の面積に等しいから，

$$S_3=S_1-S_2+\pi t^2+6\cdot t+7\cdot t+5\cdot t=\left(\pi-\frac{9}{4}\sqrt{6}\right)t^2+36t$$

(4)　3点A，B，Cが xy 平面上となるように xyz 空間をとる．

$z=a\ (-1\leqq a\leqq 1)$ における球Fの断面は半径 $\sqrt{1-a^2}$ の円である．

球Fが通過する部分の $z=a$ における断面積を $S(a)$ とすると，円Eが通過する部分の面積 S_3 において，$t=\sqrt{1-a^2}$ としたものであるから，



$$S(a)=\left(\pi-\frac{9}{4}\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{1-a^2}\right)^2+36\sqrt{1-a^2}$$
$$==\left(\pi-\frac{9}{4}\sqrt{6}\right)(1-a^2)+36\sqrt{1-a^2}$$

よって，求める体積は，

$$V=\int_{-1}^{1}\left\{\left(\pi-\frac{9}{4}\sqrt{6}\right)(1-a^2)+36\sqrt{1-a^2}\right\}da$$
$$=-\left(\pi-\frac{9}{4}\sqrt{6}\right)\int_{-1}^{1}(a-1)(a+1)\,da+36\int_{-1}^{1}\sqrt{1-a^2}\,da$$
$$=\left(\pi-\frac{9}{4}\sqrt{6}\right)\cdot\frac{1}{6}(1+1)^3+36\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2\quad\left(\because\ \int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right)$$
$$=\frac{58}{3}\pi-3\sqrt{6}$$

別解　(1)の S_1 は次のように求めてもよい．

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\dfrac{1}{5}$

$0^\circ<A<180^\circ$ より　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

よって，　$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$

4

スペード，ハート，ダイヤ，クラブを絵柄，J，K，Q を数字と呼ぶ.

4 枚のカードの取り出し方は　${}_{12}C_4=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2}=495$ (通り)　であり，これらは同様に確からしい.

(1)　4 種類の絵柄から 2 種類の選び方は　${}_4C_2=6$ (通り)

各絵柄につき，J，K，Q の 3 枚のカードがあるから，

各絵柄から 2 枚ずつ選ぶとき，　${}_3C_2\times{}_3C_2=9$ (通り)

一方の絵柄から 1 枚，他方の絵柄から 3 枚を選ぶとき，　${}_2C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_3=6$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{6\times(9+6)}{495}=\dfrac{2}{11}$

(2)　4 種類の絵柄から 3 種類の選び方は　${}_4C_3=4$ (通り)

これら 3 種類の絵柄から，1 枚，1 枚，2 枚を取り出すから，どの絵柄から 2 枚取り出すかに注意すると，

${}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_2\times{}_3C_1=3^4$ (通り)

よって，求める確率は,

$$\frac{4\cdot 3^4}{495}=\frac{36}{55}$$

(3)　4 種類の絵柄からそれぞれ 1 枚ずつ取り出すときであるから，各絵柄の数字の選び方を考えて,

$$\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1}{495}=\frac{9}{55}$$

(4)　J，Q，K の 3 種類の数字のうち，1 種類から 2 枚，残り 2 種類 から 1 枚ずつ取り出すときであるから,

その取り出し方は,

${}_3C_1\cdot{}_4C_2\times{}_4C_1\times{}_4C_1=3\cdot 6\cdot 4\cdot 4$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{3\cdot 6\cdot 4\cdot 4}{495}=\dfrac{32}{55}$

(5)　まず，J，Q，K の 3 種類の数字のうち 1 種類から 2 枚を取り出すから，その取り出し方は

${}_3C_1\times{}_4C_2=18$ (通り)

このとき取り出した 2 つの絵柄と異なる 2 つの絵柄を，残りの 2 種類の数字から取り出すから，その取り出し方は,

${}_2C_1=2$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{18\times 2}{495}=\dfrac{4}{55}$