解答速報　数学

2024年度　東海大学（２／２）

【　講　評　】

昨年と同様，大問３題で出題された．出題形式にも変化はなかった．$\boxed{1}$は７題からなる小問集合で，難易度差が激しく昨年よりも得点しづらかった．$\boxed{2}$はデータの分析と２次関数の融合問題で，計算量がやや多いが，手が止まるような問題ではないので，完答したい問題である．$\boxed{3}$は数列に関する問題であった．前半の等差数列の一般項，和に関しては問題ないだろう．後半の漸化式が典型的な形ではないため，手が止まってしまった人も少なくないだろう．出来不出来が分かれそうな問題である．全体的な難易度は昨年と同程度であるため，全体で７割以上の得点ができればよいだろう．

【　解　答　】

$\boxed{1}$　小問集合

(1)　積分法【易】　(2)　微分法【やや易】　(3)　図形と方程式／整数の性質【標準】　(4)　三角関数【易】

(5)　確率【易】　(6)　ベクトル【標準】　(7)　ベクトル【やや難】

(1)　ア：$\frac{16}{3}$，　(2)　イ：$-\frac{3}{10}$，　(3)　ウ：4,　(4)　エ：$\sqrt{2}$，オ：1　(5)　カ：8,　(6)　キ：$\frac{3\sqrt{5}}{2}$

(7)　ク：1,　ケ：$\frac{3}{7}$

$\boxed{2}$　データの分析／2次関数【標準】

(1)　ア：11,　イ：42　(2)　ウ：$-\frac{\sqrt{21}}{14}$,　(3)　エ：1,　オ：12,　(4)　カ：$\frac{7}{31}$

(5)　キ：$\frac{1}{4}$

$\boxed{3}$　数列【標準】

(1)　ア：$-7n+41$，　イ：$\frac{1}{2}n(75-7n)$　(2)　ウ：81　(3)　エ：11,

(4)　オ：5,　カ：31,　キ：1,

【 解 説 】

1

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}}(3x+2)^2\,dx-\int_0^{\frac{2}{3}}(3x-2)^2\,dx=\int_0^{\frac{2}{3}}24x\,dx=\Big[12x^2\Big]_0^{\frac{2}{3}}=4\cdot\frac{2^2}{3}=\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}$ (ア)

(2) $f(x)=x^3$，$g(x)=x^2$，$h(x)=x$ とすると，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+h)^3-\frac{5}{2}(1+h)^2+\frac{16}{5}(1+h)-\frac{6}{5}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\{(1+h)^3-1^3\}-\frac{5}{2}\{(1+h)^2-1^2\}+\frac{16}{5}\{(1+h)-1\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\{f(1+h)-f(1)\}-\frac{5}{2}\{g(1+h)-g(1)\}+\frac{16}{5}\{h(1+h)-h(1)\}}{h}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)-\frac{5}{2}g'(1)+\frac{16}{5}h'(1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{5}{2}\cdot 2+\frac{16}{5}=\frac{15+32}{10}-5=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$$ (イ)

(3) $x+2y=1$ ……①，$3x-4y=1$ ……② とおくと，

①×2+② より，　$5x=3$　　$\therefore$　$x=\frac{3}{5}$

①×3−③ より，　$10y=2$　　$\therefore$　$y=\frac{1}{5}$

よって，2 直線 ①，② の交点は，　$\left(\frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\right)$

$mx+ny=1$ がこの点を通るとき，　$3m+n=5$ $\Leftrightarrow$ $n=5-3m$

$1\leqq m+n\leqq 10$ に代入すると，　$1\leqq 5-2m\leqq 10$　　$\therefore$　$-\frac{5}{2}\leqq m\leqq 2$

これを満たす整数 m は，$m=-2$，-1，0，1，2 のみであり，

$(m,\ n)=(-2,\ 11)$，$(-1,\ 8)$，$(0,\ 5)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ -1)$

このうち $(1,\ 2)$ の場合は $mx+ny=1$ と $x+2y=1$ が一致してしまい，一点で交わることに反する．

したがって，求める組の個数は，　**4** (ウ)

(4) $y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3\pi}{4}$ であるから，

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\theta=\frac{\pi}{4}$　のとき，y は最大値 $\sqrt{2}\cdot 1=\boldsymbol{\sqrt{2}}$ (エ)

をとり，

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}$ $\Leftrightarrow$ $\theta=0$，$\frac{\pi}{2}$ のとき，y は最小値 $\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{1}$ (オ)

をとる．

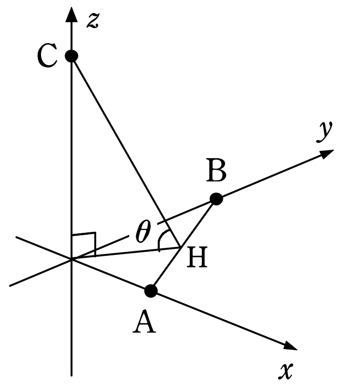
(5)　はじめに箱に入っていた赤玉の個数を $x\ (1\leqq x\leqq 10)$ とすると，取り出された2個の玉がともに赤玉である確率が $\dfrac{28}{55}$ であることから，　$\dfrac{x}{11}\cdot\dfrac{x-1}{10}=\dfrac{28}{55} \iff x(x-1)=56=8\cdot 7$

$1\leqq x\leqq 10$ より，これを満たすのは　$x=8_{(カ)}$

(6)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ への正射影ベクトルであるから，　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 0,\ 3)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{1+4}(-1,\ 2,\ 0)=\frac{1}{5}(-1,\ 2,\ 0)$$



したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1,\ 0,\ 0)+\frac{1}{5}(-1,\ 2,\ 0)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5},\ 0\right)$$

O，H は xy 平面上の点であり，C$(0,\ 0,\ 3)$ は z 軸上の点であるから，

$$\tan\theta=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}=\frac{3}{\frac{1}{5}\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}_{(キ)}$$

別解　H が xy 平面上の点であることに気づかなければ，内積を用いることになる．

$\overrightarrow{\mathrm{HO}}=-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(-\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{2}{5},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(-\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{2}{5},\ 3\right)$ であるから，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{HO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HO}}||\overrightarrow{\mathrm{HC}}|}=\frac{\frac{20}{25}}{\frac{\sqrt{20}}{5}\cdot\frac{\sqrt{20+15^2}}{5}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20+15^2}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+45}}=\frac{2}{7}$$

$\cos\theta>0$ より，θ は鋭角であるから，

$$\tan\theta=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{45}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}_{(キ)}$$

(7)　$\begin{cases}\vec{a}+3\vec{b}=\vec{x} & \cdots\cdots ① \\ \vec{a}-4\vec{b}=\vec{y} & \cdots\cdots ②\end{cases}$　とおくと，　$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$　であり，

①×4+②×3 より，　$7\vec{a}=4\vec{x}+3\vec{y}$　　$\therefore\ \vec{a}=\dfrac{4\vec{x}+3\vec{y}}{7}$

①−②より，　$7\vec{b}=\vec{x}-\vec{y}$　　$\therefore\ \vec{b}=\dfrac{\vec{x}-\vec{y}}{7}$

したがって，$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$ より，

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left|\frac{4\vec{x}+3\vec{y}}{7}+\frac{\vec{x}-\vec{y}}{7}\right|^2=\frac{|5\vec{x}+2\vec{y}|^2}{49}$$
$$=\frac{25|\vec{x}|^2+20\vec{x}\cdot\vec{y}+4|\vec{y}|^2}{49}=\frac{29+20\vec{x}\cdot\vec{y}}{49}$$

ここで，$\vec{x}$，$\vec{y}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とすると，

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta=\cos\theta$$

であるから，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ より，　$-1\leqq\vec{x}\cdot\vec{y}\leqq 1$

したがって，　$\dfrac{29+20\cdot(-1)}{49} \leqq |\vec{a}+\vec{b}|^2 \leqq \dfrac{29+20\cdot 1}{49}$　　$\therefore$　$\dfrac{9}{49} \leqq |\vec{a}+\vec{b}|^2 \leqq 1$

$|\vec{a}+\vec{b}| \geqq 0$ より，　$\dfrac{3}{7} \leqq |\vec{a}+\vec{b}| \leqq 1$

以上から，　$|\vec{a}+\vec{b}|$ の $\begin{cases} \text{最大値：} \mathbf{1}_{(ク)} \\ \text{最小値：} \mathbf{\dfrac{3}{7}}_{(ケ)} \end{cases}$

別解　$|\vec{a}+\vec{b}|$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$ で表した後は，三角不等式を用いてもよい．

$|\vec{a}+\vec{b}| = \dfrac{1}{7}|5\vec{x}+2\vec{y}|$ であり，$|5\vec{x}+2\vec{y}|$ について，

$$\big||5\vec{x}|-|2\vec{y}|\big| \leqq |5\vec{x}+2\vec{y}| \leqq |5\vec{x}|+|2\vec{y}|$$

$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$ であるから，

$$|5\cdot 1-2\cdot 1| \leqq |5\vec{x}+2\vec{y}| \leqq 5\cdot 1+2\cdot 1 \qquad \therefore \quad 3 \leqq |5\vec{x}+2\vec{y}| \leqq 7$$

等号が成り立つのは，$\vec{x}=k\vec{y}$ (k は実数) のときである．

よって，　$\dfrac{3}{7} \leqq \dfrac{1}{7}|5\vec{x}+2\vec{y}| \leqq 1$　　$\therefore$　$\dfrac{3}{7} \leqq |\vec{a}+\vec{b}| \leqq 1$

したがって，$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値は $\mathbf{1}$，最小値は $\mathbf{\dfrac{3}{7}}$ である．

別解　本解答のような置き換えに気づけなければ，次のように解けばよい．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x$ とおくと，　$\begin{cases} |\vec{a}+3\vec{b}|^2=1 \\ |\vec{a}-4\vec{b}|^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} |\vec{a}|^2+6x+9|\vec{b}|^2=1 \\ |\vec{a}|^2-8x+16|\vec{b}|^2=1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} |\vec{a}|^2+6x+9|\vec{b}|^2=1 \\ 14x-7|\vec{b}|^2=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |\vec{a}|^2=1-24x \quad \cdots\cdots① \\ |\vec{b}|^2=2x \quad \cdots\cdots② \end{cases}$$

$|\vec{a}|^2 \geqq 0$，$|\vec{b}|^2 \geqq 0$ より，　$1-24x \geqq 0$，$2x \geqq 0$　　$\therefore$　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{24}$　$\cdots\cdots③$

③ のもとで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=x$ かつ ① かつ ② を満たす $\vec{a}$，$\vec{b}$ が存在する条件は，

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \iff x^2 \leqq (1-24x)\cdot 2x$$
$$\iff x(49x-2) \leqq 0$$
$$\iff 0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{49}$$

よって，

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2x+|\vec{b}|^2=1-24x+2x+2x=1-20x$$

とり得る値の範囲は，

$$\dfrac{9}{49} \leqq |\vec{a}+\vec{b}|^2 \leqq 1 \qquad \therefore \quad \dfrac{3}{7} \leqq |\vec{a}+\vec{b}| \leqq 1$$

したがって，$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値は $\mathbf{1}_{(ク)}$，最小値は $\mathbf{\dfrac{3}{7}}_{(ケ)}$ である．

2

(1)　表1に注目する．

年	2022	2023	2024	平均
金融商品 A（万円）	9	15	9	$\dfrac{9+15+9}{3}=11$
A の偏差	-2	4	-2	
金融商品 B（万円）	21	9	6	$\dfrac{21+9+6}{3}=12$
B の偏差	9	-3	-6	

……①

$f(0)$ は A の評価額のデータの平均に等しいので，　$f(0)=\mathbf{11}_{(ア)}$

$g(1)$ は B の評価額のデータの分散に等しいので，

$$g(1)=\frac{9^2+(-3)^2+(-6)^2}{3}=27+3+12=\mathbf{42}_{(イ)}$$

(2)　①より，A の評価額のデータの分散は，　$\dfrac{(-2)^2+4^2+(-2)^2}{3}=\dfrac{24}{3}=8$

A，B の評価額のデータの共分散は，　$\dfrac{(-2)\cdot 9+4\cdot(-3)+(-2)\cdot(-6)}{3}=-6-4+4=-6$

よって，(1) の $g(1)$ も用いると，A，B の評価額のデータの相関係数は，

$$\frac{-6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{42}}=\frac{-3}{2\sqrt{21}}=-\frac{\sqrt{21}}{14}{}_{(ウ)}$$

(3)　① と表2から，　$f(x)=11(1-x)+12x=x+11$　……②

$0\leqq x\leqq 1$ より，これは　$x=\mathbf{1}_{(エ)}$　のとき最大値　$\mathbf{12}_{(ウ)}$　をとる．

(4)　① と表2から，

年	2022	2023	2024
資産（万円）	$9(1-x)+21x$	$15(1-x)+9x$	$9(1-x)+6x$
偏差	$-2(1-x)+9x$	$4(1-x)-3x$	$-2(1-x)-6x$

よって，

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{(4+16+4)(1-x)^2+(-36-24+24)(1-x)x+(81+9+36)x^2}{3}\\&=8(1-x)^2-12(1-x)x+42x^2=8-16x+8x^2-12x+12x^2+42x^2\\&==62x^2-28x+8\quad\cdots\cdots③\\&=62\left(x-\frac{14}{62}\right)^2-\frac{14^2}{62}+8\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq 1$ より，これは　$x=\dfrac{14}{62}=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{31}}{}_{(カ)}$　のとき最小値をとる．

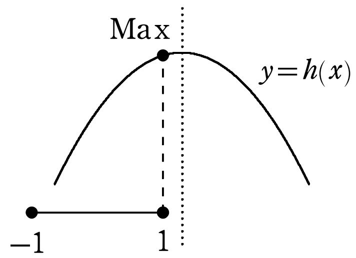
(5) ②，③ から，

$$h(x)=(x+11)^2-a(62x^2-28x+8)=(1-62a)x^2+2(11+14a)+121-8a$$

$a \geqq \dfrac{1}{10}$ より $1-62a<0$ であるから，$y=h(x)$ は上に凸の放物線であり，その軸は

$$x=-\frac{11+14a}{1-62a}>0$$

よって，$h(x)\,(0 \leqq x \leqq 1)$ が $x=1$ で最大値とるための必要十分条件は，
放物線 $y=h(x)$ の軸について，



$$x=-\frac{11+14a}{1-62a} \geqq 1 \iff 11+14a \geqq 62a-1$$

$$\iff a \leqq \frac{1}{4}$$

$\dfrac{1}{10} \leqq a$ であるから，　$\dfrac{1}{10} \leqq a \leqq \dfrac{1}{4}$ (キ)

$\boxed{3}$

(1) $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，初項から第5項までの和が100であり，初項から第10項までの和が25であることから，

$$\begin{cases} \dfrac{a+(a+4d)}{2}\cdot 5=100 \\ \dfrac{a+(a+9d)}{2}\cdot 10=25 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2d=20 & \cdots\cdots① \\ a+\dfrac{9}{2}d=\dfrac{5}{2} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①－② より， $-\dfrac{5}{2}d=20-\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore\quad d=-8+1=-7$

① に代入して， $a=20-2(-7)=34$

以上から， $a_n=34-7(n-1)=\boldsymbol{41-7n}_{(ア)}$

また，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n=\frac{34+(41-7n)}{2}\cdot n=\boldsymbol{\frac{n(75-7n)}{2}}_{(イ)} \quad\cdots\cdots③$$

(2) $n\geqq 2$ のとき $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=2^{a_n}$ より，

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\frac{b_{n-2}}{b_{n-3}}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_2}{b_1}=2^{a_n}\cdot 2^{a_{n-1}}\cdot 2^{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdots 2^{a_3}\cdot 2^{a_2}$$

$$\frac{b_n}{b_1}=2^{a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n}$$

$b_1=2^{a_1}$ であるから，

$$b_n=2^{a_1}\cdot 2^{a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n}=2^{S_n}$$

③ より $S_3=\dfrac{3(75-21)}{2}=81$ であるから， $b_3=2^{81}$

(3) $b_n=2^{S_n}<1 \iff S_n<0$

$$\iff \frac{n(75-7n)}{2}<0 \qquad\therefore\quad 7n>75$$

これを満たす最小の自然数 n は **11**$_{(エ)}$

(4) $n\geqq 2$ のとき， $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=2^{a_n}>1 \iff a_n>0$

$$\iff 41-7n>0 \qquad\therefore\quad 7n<41$$

よって，

$n=2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}>1$

$n=6,\ 7,\ 7,\ \cdots$ のとき $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}<1$

であるから，

$$b_1<b_2<b_3<b_4<b_5>b_6>b_7>\cdots\cdots$$

したがって， b_n は $\boldsymbol{n=5}$ のとき最大値をとる．

③ より $S_5=\dfrac{5(75-7\cdot5)}{2}=100$ であるから，　$b_5=2^{100}$

常用対数をとると，

$$\begin{aligned}\log_{10}b_5&=\log_{10}2^{100}=100\log_{10}2\\&=100\cdot0.3010=30.10\end{aligned}$$

$30\leqq30.10<31$ より　$10^{30}\leqq10^{30.10}=b_5<10^{31}$

したがって，b_5 の桁数は **31** である．

また，$b_5=10^{30.10}=10^{30}\cdot10^{0.10}$ であり，

$$\log_{10}1\leqq0.10<\log_{10}2=0.3010 \qquad \therefore\ 1\leqq10^{0.10}<2$$

であるから，b_5 の最高位に現れる数字は $\mathbf{1}_{(ケ)}$ である．

別解　(2) は次のように解くこともできる．

帰納的に $b_n>0$ であるから，$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=2^{a_n}$ の両辺の底を 2 とする対数をとると，

$$\log_2\frac{b_n}{b_{n-1}}=\log_2 2^{a_n} \iff \log_2 b_n=\log_2 b_{n-1}+a_n \quad (n\geqq2)$$

$$\iff \log_2 b_{n+1}=\log_2 b_n+a_{n+1} \quad (n\geqq1)$$

$\log_2 b_n$ の階差数列の一般項は a_{n+1} であるから，$n\geqq2$ のとき，

$$\begin{aligned}\log_2 b_n&=\log_2 b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}=a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k=S_n\\&=\frac{n(75-7n)}{2}\quad (\because ①)\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成立する．

したがって，　$\log_2 b_3=\dfrac{3(75-7\cdot3)}{2}=3\cdot27=81$　　$\therefore$　$b_3=2^{81}{}_{(ウ)}$

別解　(4) の b_n の最大値は次のように求めることもできる．

帰納的に $b_n>0$ であるから，　$\log_2 b_n=\log_2 2^{S_n}=S_n$

$\log_2 x$ は $x>0$ で単調に増加するので，S_n の最大値を考えればよい．

(2) より，　$S_n=-\dfrac{7}{2}\left(n^2-\dfrac{75}{7}n\right)=-\dfrac{7}{2}\left(n-\dfrac{75}{14}\right)^2+\dfrac{7}{2}\left(\dfrac{75}{14}\right)^2$

$5<\dfrac{75}{14}<5+\dfrac{1}{2}$ より，$n=\mathbf{5}_{(オ)}$ のとき最大値をとる．