解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　東海大学（2／3）

【　講　評　】

前日（2／2）の試験同様，大問3題で出題された．出題形式にも変化はなかった．$\boxed{1}$は7題からなる小問集合で，前日の試験よりも難易度が下がり，得点しやすい問題が多かった．$\boxed{2}$はこれまで東海大ではあまり出題されていない確率漸化式の問題であったが，誘導が親切なので，焦らずに解き進めれば問題ないだろう．慣れている人は先に漸化式を立てることで，解答時間を短縮することができる．$\boxed{3}$は図形と漸化式の融合問題で，多くの受験生が苦手とするテーマであるが，東海大では何度も出題されているので，どれだけ対策ができていたかで明暗が分かれるだろう．

全体的な難易度は昨年と同程度で，全体で7割以上は得点したい．

【　解　答　】

$\boxed{1}$　小問集合

(1)　整数の性質【易】　(2)　式の計算【易】　(3)　積分法（数Ⅱ）【やや易】　(4)　指数関数【易】

(5)　図形と方程式【標準】　(6)　三角関数【やや易】　(7)　数列【標準】

(1)　ア：6，イ：306，　(2)　ウ：84，　(3)　エ：$\dfrac{84}{5}$，オ：$\dfrac{88}{5}$，　(4)　カ：$\sqrt{2}$，

(5)　キ：7，ク：11，　(6)　ケ：$-\dfrac{208}{225}$，　(7)　コ：$-n(2n+1)$，サ：$n(2n-1)$

$\boxed{2}$　確率／数列【標準】

(1)　ア：$\dfrac{1}{3}$，　イ：$\dfrac{2}{3}$，　ウ：0，　(2)　エ：$\dfrac{2}{9}$，　オ：$\dfrac{2}{3}$，　カ：$\dfrac{1}{9}$，　(3)　キ：$\dfrac{1}{3}$

(4)　ク：$\dfrac{1}{6}$，　(5)　ケ：0，　(6)　コ：$\dfrac{2}{3}$，　(7)　サ：$\dfrac{1}{6}$，　シ：$\dfrac{1}{2}$，　ス：$\dfrac{1}{3}$，

$\boxed{3}$　数列／図形【標準】

(1)　ア：$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，　(2)　イ：$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，　(3)　ウ：$\dfrac{2}{3}$，　(4)　エ：8，　オ：$-\dfrac{3}{2}$

(5)　カ：$4\sqrt{3}\pi$，　キ：$-\dfrac{3}{2}$，　ク：5，

【 解 説 】

1

(1)　$m^2-n^2=35 \iff (m+n)(m-n)=5\cdot 7$

m，nが自然数であることから，$m+n>0$ であり，$m+n>m-n$ であることに注意すると，

$(m+n,\ m-n)=(35,\ 1),\ (7,\ 5)$

$\therefore\ (m,\ n)=(18,\ 17),\ (6,\ 1)$

のみである．よって，mn の取り得る値は　$6\cdot 1=\mathbf{6}_{(ア)}$　と　$18\cdot 17=\mathbf{306}_{(イ)}$

(2)　二項定理から，　$\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^9=\displaystyle\sum_{k=0}^{9} {}_9\mathrm{C}_k x^{9-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{9} {}_9\mathrm{C}_k x^{9-3k}$

この一般項が定数項となるとき，　$9-3k=0 \quad \therefore\ k=3$

よって，定数項は　${}_9\mathrm{C}_3 x^0=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=3\cdot 4\cdot 7=\mathbf{84}_{(ウ)}$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt=A$，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=B$ であるから，

$$\begin{cases} A=\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^1 (24t^2+Bt)\,dt=\left[8t^3+\frac{B}{2}t^2\right]_0^1=8+\frac{B}{2} \\ B=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (At^2+24t)\,dt=\left[\frac{A}{3}t^3+12t^2\right]_0^1=\frac{A}{3}+12 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A-\dfrac{B}{2}=8 & \cdots\cdots① \\ -\dfrac{A}{3}+B=12 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①×2+②より，　$\dfrac{5}{3}A=28 \quad \therefore\ A=\mathbf{\dfrac{84}{5}}_{(エ)}$

①+②×3より，　$\dfrac{5}{2}B=44 \quad \therefore\ B=\mathbf{\dfrac{88}{5}}_{(オ)}$

(4)　$2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{2}}\times 6^{-\frac{1}{6}}\times(1.5)^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot 3)^{-\frac{1}{6}}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^0=\mathbf{\sqrt{2}}_{(カ)}$

(5)　∠QPRの二等分線上の点を$(X,\ Y)$ とすると，

この点から2直線l，mへの距離が等しいことから，

$$\frac{|4X+3Y-3|}{5}=\frac{|3X+4Y-8|}{5}$$

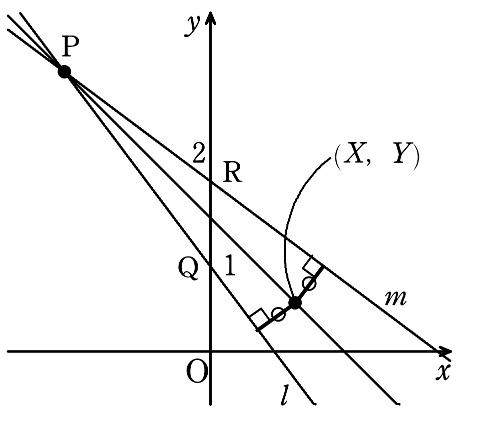
$\iff\ 4X+3Y-3=\pm(3X+4Y-8)$

$\iff\ X-Y+5=0$　または　$7X+7Y-11=0$

直線lのy切片は1，直線mのy切片は2であり，

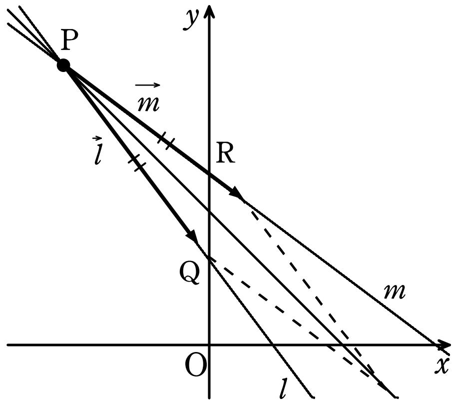
求める直線のy切片はこの間にあるから，

$7x+7y-11=0_{(キク)}$



別解　角の二等分線の方向ベクトルを利用してもよい．

$$\begin{cases} l : 4x+3y-3=0 & \cdots\cdots③ \\ m : 3x+4y-8=0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$



③×4−④×3 より，　$7x+12=0$　　$\therefore$　$x=-\dfrac{12}{7}$

これを④に代入して，　$-\dfrac{9}{7}+y-2=0$

よって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{12}{7},\ \dfrac{23}{7}\right)$

l の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と同じ向きのベクトルは　$\vec{l}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

また，m の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と同じ向きのベクトルは　$\vec{m}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$|\vec{l}|=|\vec{m}|$ より，∠QPR を 2 等分する方向ベクトルは，　$\vec{l}+\vec{m}=\begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix}$

よって，∠QPR を 2 等分する直線の傾きは -1 であり，これが P を通ることから，

$$y=-\left(x+\frac{12}{7}\right)+\frac{23}{7} \qquad \therefore\ 7x+7y-11=0_{\text{(キク)}}$$

(6)　$\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ と $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{5}$ の両辺を 2 乗すると，

$$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{9},$$

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{25}$$

この 2 式の和をとると，

$$1-2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta+1=\frac{34}{9\cdot25}$$

$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{17}{9\cdot25}-1=\frac{17}{225}-1=-\mathbf{\frac{208}{225}}_{\text{(ケ)}}$$

(7)　$S_{2n}=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots\cdots+\{(2n-1)^2-(2n)^2\}=\sum_{k=1}^{n}\{(2k-1)^2-(2k)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(1-4k)=\dfrac{\{-3+(1-4n)\}}{2}\cdot n$　（∵ 等差数列の和の公式）

$=-\boldsymbol{n(2n+1)}_{\text{(コ)}}$

また，　$S_{2n-1}=S_{2n}-a_{2k}=-n(2n+1)-\{-(2n)^2\}=\boldsymbol{n(2n-1)}_{\text{(キ)}}$

2

Aに白が p 個，黒が q 個，Bに白が r 個，黒が s 個入っていることを $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ と表す.

(3)，(4)，(5)，(6)

n 回後から $n+1$ 回後の推移は次のようになる.

n 回後	$n+1$ 回後
① $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の確率 P_n	④ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の確率 P_{n+1}
② $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の確率 Q_n	⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の確率 Q_{n+1}
③ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ の確率 R_n	

①→④となるためには，Aから黒を取り出してBに入れ，Bから黒を取り出してAに入れるときであるから，

その確率は　$1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって，n 回目の操作の後で $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ であり，$n+1$ 回目の操作の後も $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる確率は　$\dfrac{1}{3}P_n$ (キ)

②→④となるのは，Aから白を取り出したBに入れ，Bから黒を取り出してAに入れるときであるから，

その確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$ (ク)

よって，n 回目の操作の後で $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$n+1$ 回目の操作の後に $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる確率は　$\dfrac{1}{6}Q_n$ (ク)

また，③→④となることはないので，n 回目の操作の後 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ であり，$n+1$ 回目の操作の後に $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる

確率は　0 (ケ)

したがって，$n\geqq 0$ において　$P_{n+1}=\dfrac{1}{3}P_n+\dfrac{1}{6}Q_n$　……⑥

①→⑤となるのは，Aから黒を取り出してBに入れ，Bから白を取り出してAに入れるときであるから，
その確率は，

$$1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

②→⑤となるのは，

　Aから白を取り出してBに入れ，Bから白を取り出してAに入れる，または

　Aから黒を取り出してBに入れ，Bから黒を取り出してAに入れる

ときであるから，その確率は　$1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

③→⑤となるのは，Aから白を取り出したBに入れ，Bから黒を取り出してAに入れるときであるから，

その確率は　$1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

したがって，$n\geqq 0$ において　$Q_{n+1}=\dfrac{2}{3}P_n+\dfrac{2}{3}Q_n+\dfrac{2}{3}R_n$

$P_n+Q_n+R_n=1$ より，　$Q_{n+1}=\dfrac{2}{3}$ (コ)

(1)，(2)

$n \geqq 0$ において $Q_{n+1}=\dfrac{2}{3}$ であるから，　$Q_1=\dfrac{2}{3}$ (イ)，$Q_2=\dfrac{2}{3}$ (オ)

$P_0=1$，$Q_0=0$ より，⑥を用いて，

$$P_1=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 0=\frac{1}{3}\ (\text{ア}),\quad P_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\ (\text{エ})$$

以上から，

$$R_1=1-P_1-Q_1=1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=0\ (\text{ウ}),\quad R_2=1-P_2-Q_2=1-\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}\ (\text{カ})$$

(3)　$n \geqq 0$ において $Q_{n+1}=\dfrac{2}{3}$ であるから，$n \geqq 1$ において　$Q_n=\dfrac{2}{3}$

よって，⑥に代入すると $n \geqq 1$ において，　$P_{n+1}=\dfrac{1}{3}P_n+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{3}$

これを変形すると，　$P_{n+1}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\left(P_n-\dfrac{1}{6}\right)$

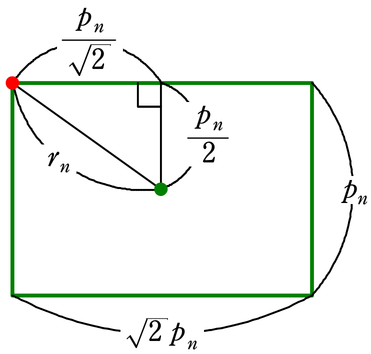
$\left\{P_n-\dfrac{1}{6}\right\}$ は等比数列であるから，　$P_n-\dfrac{1}{6}=\left(P_1-\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

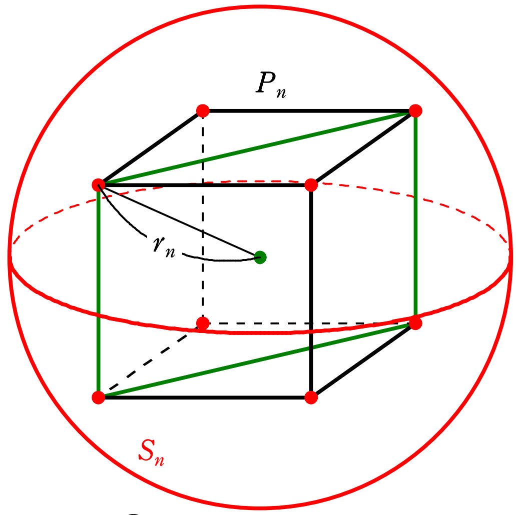
$$\therefore\ P_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\ (\text{サシス})$$

3

球 S_n の半径を r_n，立方体 P_n の一辺の長さを p_n とし，

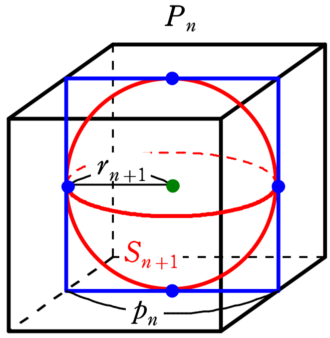
右図の断面を抜き出すと，下図のようになる．





三平方の定理から，　$r_n=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,p_n$　　$\therefore$　$p_n=\frac{2}{\sqrt{3}}r_n$　……①

ここで，右図の断面に注目すると，　$r_{n+1}=\frac{1}{2}p_n$



よって①から，　$r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}r_n$

$r_1=1$ であるから，　$r_n=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

①に代入すると，　$p_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$

以下，これらを用いる．

(1)　P_1 の一辺の長さは，　$p_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$（ア）

(2)　S_2 の半径は，　$r_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$（イ）

(3)　P_2 の一辺の長さは，　$p_2=\frac{2}{3}$（ウ）

(4)　P_n の体積は，　$p_n{}^3=2^3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3n}=8\times3^{-\frac{3}{2}n}$（エオ）

(5)　S_n の体積は，　$\frac{4\pi}{3}r_n{}^3=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3n-3}=4\sqrt{3}\,\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3n}=4\sqrt{3}\,\pi\times3^{-\frac{3}{2}n}$（カキ）

(6)　$S_n=S_1\cdot\left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{n-1}$ であるから，$S_n\leqq\frac{1}{216}S_1$ より

$$S_1\cdot\left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{n-1}\leqq\frac{1}{216}S_1 \iff \left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{n-1}\leqq6^{-3}$$

$$\iff 3^{3(n-1)}\geqq6^6$$

$$\iff 3^{n-1}\geqq6^2=36$$

$3^3=27$，$3^4=81$ であるから，これを満たす最小の n は，

$n-1=4$　　$\therefore$　$n=5$（ク）