解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　東京医科大

【　講　評　】

例年通り，大問４題がマーク形式で出題された．第１問の小問集合が例年に比べて解きやすかった．いずれの問題も典型問題であるが，第２問の最後の設問はやや解きづらかった．解けるところを確実に解き，全体で70%以上の得点を目指したい．以下，大問ごとに特徴を述べる．

第１問　小問集合【やや易】

⑴は整数の性質（n進法），⑵は数列和の計算，⑶は複素数平面，⑷は微分法（数Ⅲ）であった．難易度も低く，計算量も少ないので，いずれも確実に得点したい．

第２問　場合の数【やや難】

正三十六角形の頂点を選んで作れる四角形を数える問題であった．三角形を数える問題はよく見かけるが，四角形は珍しく，手の止まってしまった人が多いかもしれない．様々な数え方があるので，時間をかけて考えられたかがポイントとなる．

第３問　ベクトル（空間座標）【標準】

空間座標内の平面と，２つの球面の交線に関する問題であった．これまで東京医科大では出題されてこなかったタイプの問題であるため，面食らった受験生が少なくないだろう．ただし，典型的な問題であるし，難易度が高いわけでもないので，確実に得点したい問題である．

第４問　積分法（数Ⅲ）【標準】

４次関数に関する回転体の体積を求める問題であった．親切な誘導にしたがって解き進めることができれば完答できるだろう．なお，第一種オイラー積分を覚えていた人は，短時間で解くことができただろう．

【　解　答　】

第１問　⑴　ア：1，イ：1，ウ：3，エ：2，オ：4，　⑵　カ：5，キ：2，ク：3，ケ：5
⑶　コ：1，サ：1，シ：2，ス：2，セ：3　⑷　ソ：1，タ：2，チ：2，ツ：3

第２問　⑴　ア：9，イ：2，　⑵　ウ：1，エ：5，オ：3，　⑶　カ：1，キ：6，ク：7，ケ：4，

第３問　⑴　ア：2，イ：2，　⑵　ウ：1，エ：2，オ：0，カ：0，キ：3，
⑶　ク：1，ケ：2，コ：2，サ：6，シ：5，ス：4，　⑷　セ：3，ソ：2，タ：6，チ：1，

第４問　⑴　ア：2，イ：－，ウ：3，エ：－，オ：4，カ：4　⑵　キ：－，ク：2，ケ：1，コ：8，サ：7，シ：8
⑶　ス：⑤，セ：⑥　⑷　ソ：2，タ：1，チ：8，ツ：7，テ：7，ト：0，

【 解 説 】

1

(1) $x=4.\dot{3}\dot{2}_{(5)}=4+\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5^2}+\dfrac{3}{5^3}+\dfrac{2}{5^4}+\cdots\cdots$ ……①

$5^2x=4\cdot 5^2+3\cdot 5+2+\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5^2}+\dfrac{3}{5^3}+\dfrac{2}{5^4}+\cdots\cdots$ ……②

②−① より， $24x=4\cdot 5^2+3\cdot 5+2=113$ $\quad\therefore\quad s=\dfrac{\mathbf{113}}{\mathbf{24}}$ (アイウエオ)

別解 無限等比級数と考えてもよい．

$\left|\dfrac{1}{5^2}\right|<1$ であるから，求める和は収束して，

$$\begin{aligned}x&=4.\dot{3}\dot{2}_{(5)}=4+\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{2}{5^4}+\frac{3}{5^5}+\frac{2}{5^6}+\cdots\cdots\\&=4+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}\right)+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}\right)\cdot\frac{1}{5^2}+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}\right)\cdot\frac{1}{5^4}+\cdots\cdots\\&=4+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}=\frac{\mathbf{113}}{\mathbf{24}}\end{aligned}$$ (アイウエオ)

(2) $$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{15}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_3}&=\sum_{n=3}^{15}\frac{6}{(n-2)(n-1)n}=3\sum_{n=3}^{15}\left\{\frac{1}{(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-1)n}\right\}\\&=3\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{14\cdot 15}\right)=\frac{\mathbf{52}}{\mathbf{35}}\end{aligned}$$ (カキクケ)

(3) $\alpha=\sqrt{2}(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$， $\beta=5(1+i)=5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって， $\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\pi$ (コサシ)

また， $\arg(\alpha\beta)^{2024}=2024\arg\alpha\beta=2024\times\dfrac{\pi}{12}=168\pi+\dfrac{2}{3}\pi$

したがって，$(\alpha\beta)^{2024}$ の偏角は $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\pi$ (スセ)

(4) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ より， $g(a)=g\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ (ソタ)

$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ について， $x=f(y)$ が成り立つから，

$$\frac{dx}{dy}=1\cdot e^y+y\cdot e^y=(1+y)e^y\quad\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1+y)e^y}=g'(x)$$

$y=g(x)$ について， $x=a=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ のとき $y=\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$g'(a)=g'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}$$ (チツ)

2

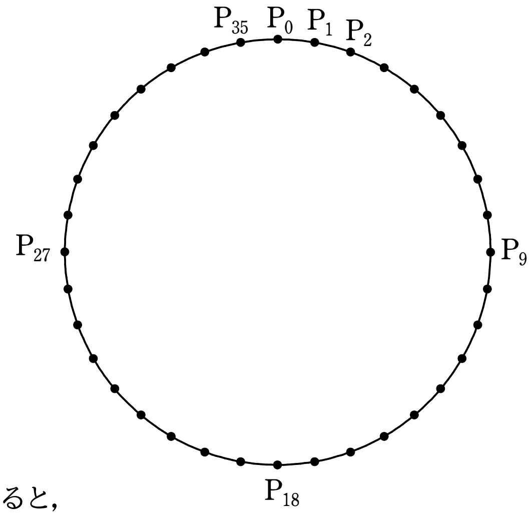
(1)　正方形となる頂点の選び方は，

$\{P_0,\ P_9,\ P_{18},\ P_{27}\}$，$\{P_1,\ P_{10},\ P_{19},\ P_{28}\}$，$\{P_2,\ P_{11},\ P_{20},\ P_{29}\}$，
$\{P_3,\ P_{12},\ P_{21},\ P_{30}\}$，$\{P_4,\ P_{13},\ P_{22},\ P_{31}\}$，$\{P_5,\ P_{14},\ P_{23},\ P_{32}\}$，
$\{P_6,\ P_{15},\ P_{24},\ P_{33}\}$，$\{P_7,\ P_{16},\ P_{25},\ P_{34}\}$，$\{P_8,\ P_{17},\ P_{26},\ P_{35}\}$

であるから，正方形の個数は $\mathbf{9}_{(ア)}$ 個.

この正方形の対角線の長さは円の直径 2 に等しいから，その面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\mathbf{2}_{(イ)}$$



(2)　対角線とならない 2 点を選ぶと，長方形は一意に定まる.

この選び方は，対角線となる 2 点の選び方は 18 通りであることに注意すると，

$${}_{36}C_2-18=18\times 34 \text{ 通り}$$

これにより，各々の長方形を 4 回重複して数えているから，長方形の個数は，　$\dfrac{18\times 34}{4}=9\times 17=\mathbf{153}_{(ウエオ)}$ 個

(3)　2 辺を共有する三角形は，次の 2 通りの場合がある.

(ⅰ) 隣り合う 2 辺を共有するとき

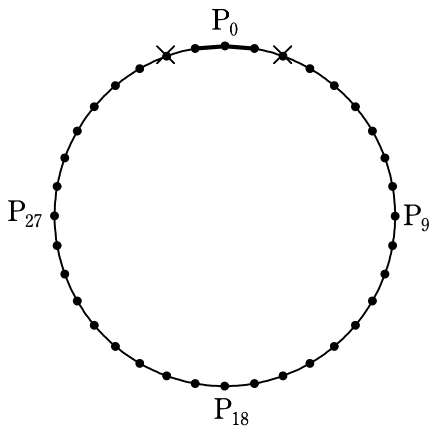
隣り合う 2 辺が共有する頂点の選び方を考えると 36 通りであり，

これにより 3 つの頂点が選ばれる.

残り 1 つの頂点は，選んだ 3 つの頂点の両端と隣り合う点以外

の 31 個から選べばよい.

よって，　$36\times 31=1116$ 個



(ⅱ) 隣り合わない 2 辺を共有するとき

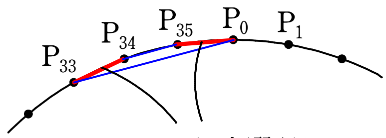
2 辺の選び方は ${}_{36}C_2$ 通りである.

このうち，2 辺が隣り合うものは 36 通りである.

また，右図のように選んだ 2 辺の間に正三十六角形の 1 辺が入るものは，

正三十六角形と 3 辺を共有するため不適であり，これも 36 通りである.

よって，　${}_{36}C_2-36-36=630-72=558$ 通り



この 2 辺を選ぶと，
3 辺共有となる.

(ⅰ)，(ⅱ) より，正三十六角形と 2 辺を共有する四角形の個数は，

$$1116+558=\mathbf{1674}_{(カキクケ)} \text{ 個}$$

別解　(2) は次のように数えてもよい.

直径 P_0P_{18} に平行な辺をもつ長方形となる頂点の選び方は，以下の8 通りである.

$\{P_1,\ P_{17},\ P_{19},\ P_{35}\}$，$\{P_2,\ P_{16},\ P_{20},\ P_{34}\}$，…，$\{P_8,\ P_{10},\ P_{26},\ P_{28}\}$

直径は全部で 18 本あるから，$8\times 18=144$ 個

これらに正方形は含まれないから，(1) とあわせて，　$144+9=\mathbf{153}_{(ウエオ)}$ 個

$\boxed{3}$

(1)　平面 $ax+by+cz=d$ に垂直なベクトルの一つは $(a,\ b,\ c)$ である．

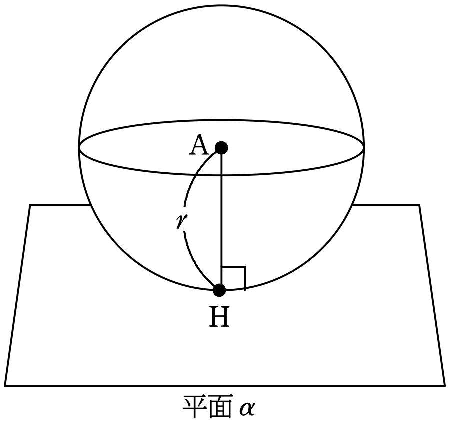
よって，平面 α：$2x+2y+z=3$ に垂直なベクトルの一つは　$(2,\ 2,\ 1)$

これは z 成分が 1 であるから，　$\vec{n}=(\mathbf{2},\ \mathbf{2},\ 1)$(アイ)

(2)　球面 S_1 は平面 α と点 H で接するから，　$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=r$

よって，点と平面の距離の公式より，

$$r=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\frac{|2\cdot 8+2\cdot 8+7-3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{36}{3}=\mathbf{12}$$(ウエ)



また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}/\!/\vec{n}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\vec{n}=(8,\ 8,\ 7)+k(2,\ 2,\ 1)\\&=(2k+8,\ 2k+8,\ k+7)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

となる実数 k が存在する．

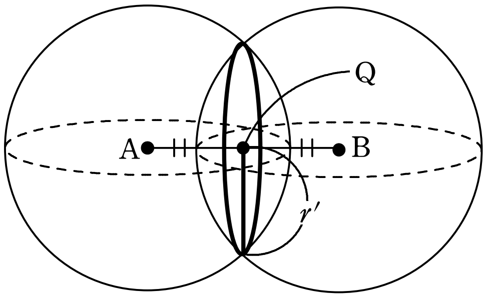
点 H は平面 α 上の点であるから，方程式に代入して，

$$2(2k+8)+2(2k+8)+k+7=3$$

$$9k+36=0\qquad\therefore\quad k=-4$$

① に代入すると，　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(0,\ 0,\ 3)$　　$\therefore$　H $(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{3})$(オカキ)

(2)　球面 S_1 と球面 S_2 の半径は等しいから，これらの共通部分の円の中心 Q は線分 AB の中点である．



よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{2}\{(8,\ 8,\ 7)+(4,\ 2,\ 1)\}=(6,\ 5,\ 4)$$

$\therefore$　Q $(\mathbf{6},\ \mathbf{5},\ \mathbf{4})$(サシス)

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(8,\ 8,\ 7)-(6,\ 5,\ 4)=(2,\ 3,\ 3)$$

より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\sqrt{2^2+3^2+3^2}=\sqrt{22}$$

であるから，三平方の定理により，

$$r'=\sqrt{r^2-|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2}=\sqrt{12^2-22}=\sqrt{\mathbf{122}}$$(クケコ)

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(0,\ 0,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(6,\ 5,\ 4)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=3,\quad|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{6^2+5^2+4^2}=\sqrt{77},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0+0+12=12$$

よって，△OHQ の面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 77-12^2}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{61}}$$(セソタチ)

別解(2)　点 H の座標は，ベクトル方程式を立てずに求めることもできる．

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} /\!/ \vec{n}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=r=12$，$|\vec{n}|=\sqrt{4+4+1}=3$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\pm|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=(8,\ 8,\ 7)\pm\frac{12}{3}(2,\ 2,\ 1)$$
$$=(16,\ 16,\ 11)\ \text{または}\ (0,\ 0,\ 3)$$

このうち，平面 α の方程式を満たす方を考えると，

$\mathrm{H}(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{3})$ (オカキ)

別解(2)　点 H は正射影ベクトルを用いて求めることもできる．

C$(1,\ 1,\ -1)$ は平面 α 上の点であり，

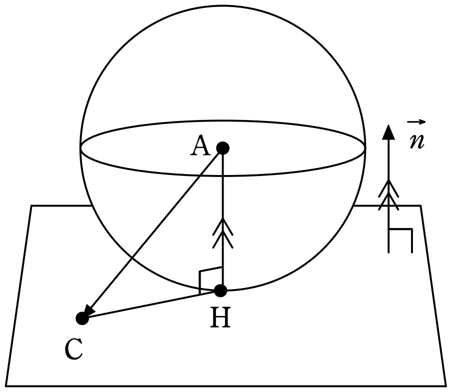
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ -1)-(8,\ 8,\ 7)$$
$$=(-7,\ -7,\ -8)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} /\!/ \vec{n}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の $\vec{n}$ への正射影ベクトルであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=-14-14-8=-36$，$|\vec{n}|^2=4+4+1=9$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{-36}{9}\vec{n}=(-8,\ -8,\ -4)$$



平面 α

よって，　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(8.\ 8.\ 7)+(-8,\ -8,\ -4)=(0,\ 0,\ 3)$　　$\therefore$　$\mathrm{H}(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{3})$ (オカキ)

補足　法線ベクトルについて

$\vec{n}=(a,\ b,\ c)\neq\vec{0}$，平面 $ax+by+cz=d$　……①とする．

平面①上の任意の点を P$(x,\ y,\ z)$ とする．

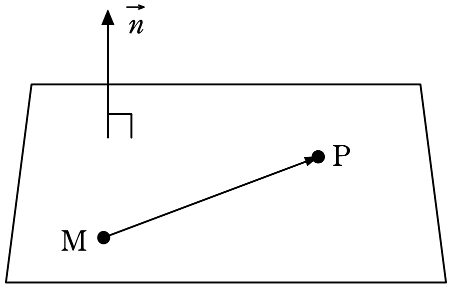
定点 M$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ が平面①上にあるとき，

$$ax_0+by_0+cz_0=d \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．

①−② より，

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (a,\ b,\ c)\cdot(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$$
$$\Leftrightarrow\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}=0$$



$\vec{n}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ であり，$\vec{n}$ は平面①の法線ベクトルであることがわかる．

4

(1)　曲線 $y=f(x)$ は x 軸と $x=-2$，1 において接しているから，

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x+2)^2(x-1)^2$$

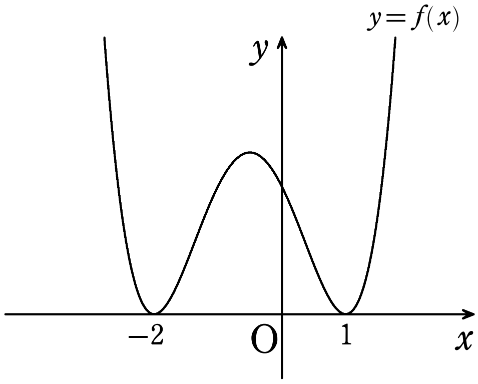
と表せる．

右辺を展開すると，

$$\begin{aligned}(x+2)^2(x-1)^2&=(x^2+4x+4)(x^2-2x+1)\\&=x^4+2x^3-3x^2-4x+4\end{aligned}$$

左辺と係数を比較すると，

$a=\mathbf{2}$(ア)，$b=\mathbf{-3}$(イウ)，$c=\mathbf{-4}$(エオ)，$d=\mathbf{4}$(カ)



(2)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^7\,dx&=\left[\frac{1}{8}(x+2)(x-1)^8\right]_{-2}^{1}-\frac{1}{8}\int_{-2}^{1}1\cdot(x-1)^8\,dx\\&=-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{9}(x-1)^9\right]_{-2}^{1}\\&=\frac{(-3)^9}{8\cdot 9}=-\frac{3^7}{8}=-\frac{\mathbf{2187}}{\mathbf{8}}\end{aligned}$$

(キクケコサシ)

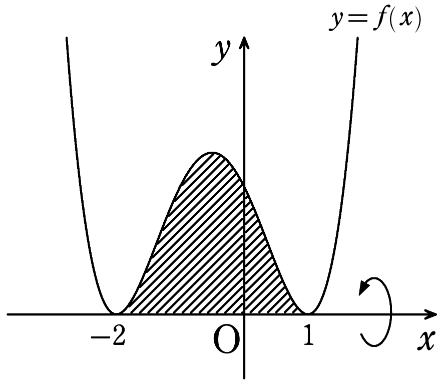
(3)　部分積分により，

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(x+2)^{p+1}(x-1)^q\,dx&=\left[\frac{1}{q+1}(x+2)^{p+1}(x-1)^{q+1}\right]_{-2}^{1}-\frac{p+1}{q+1}\int_{-2}^{1}(x+2)^p(x-1)^{q+1}\,dx\\&=\frac{\mathbf{-(p+1)}}{\mathbf{q+1}}\int_{-2}^{1}(x+2)^p(x-1)^{q+1}\,dx\end{aligned}$$

（ス：⑤，セ：⑥）

(4)　$-2\leqq x\leqq 1$ において $f(x)\geqq 0$ であるから，求める体積は，

$$\begin{aligned}V&=\int_{-2}^{1}\pi\{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_{-2}^{1}\{(x+2)^2(x-1)^2\}\,dx\\&=\pi\int_{-2}^{1}(x+2)^4(x-1)^4\,dx\end{aligned}$$



ここで，(3) を繰り返し用いると，

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(x+2)^4(x-1)^4\,dx&=-\frac{4}{5}\int_{-2}^{1}(x+2)^3(x-1)^5\,dx\\&=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\int_{-2}^{1}(x+2)^2(x-1)^6\,dx\\&=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\int_{-2}^{1}(x+2)^1(x-1)^7\,dx\\&=-\frac{4}{35}\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^7\,dx\end{aligned}$$

よって，(2) より

$$V=\pi\times\left\{-\frac{4}{35}\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^7\,dx\right\}=-\frac{4}{35}\cdot\left(-\frac{2187}{8}\right)\pi=\frac{\mathbf{2187}}{\mathbf{70}}\pi$$

(ソタチツテト)

別解 (2)　部分積分を用いなくてもよい．

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^7\,dx&=\int_{-2}^{1}\{(x-1)+3\}(x-1)^7\,dx=\int_{-2}^{1}\left\{(x-1)^8+3(x-1)^7\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{9}(x-1)^9+\frac{3}{8}(x-1)^8\right]_{-2}^{1}\\&=-\frac{1}{9}(-3)^9-\frac{3}{8}(-3)^8\\&=-\frac{(-3)^7}{8}(8-9)=-\frac{\mathbf{2187}}{\mathbf{8}}\ \text{（キクケコサシ）}\end{aligned}$$

補足　整関数の定積分では，以下の公式を覚えておくとよい．

第一種オイラー積分

m，n を 0 以上の整数とすると，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\ dx=\frac{(-1)^n\cdot m\,!\,n\,!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

これを覚えておけば，本問で登場する定積分は

(2)　$\displaystyle\int_{-2}^{1}(x+2)^1(x-1)^7\,dx=\frac{7\,!1!(-1)^1}{(7+1+1)!}\{2-(-1)\}^{7+1+1}=\frac{-3^7}{8}=-\frac{2187}{8}$

(4)　$\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+2)^4(x-1)^4\,dx=\frac{4\,!4!(-1)^4}{(4+4+1)!}\{2-(-1)\}^{4+4+1}=\frac{2187}{70}$

と計算することができる．