2024 年度　慶應義塾大学

【　講　評　】

考察が多く、計算量が非常に少ないため、かなり時間的余裕がある。7 割は得点したい。

Ⅰは小問集合。特に難しいものもなく、落とせない。

Ⅱはコンデンサーとコイルの回路の問題。最近の難関大ではよく出題される問題であった。一度扱ったことがあれば、難なく解けたであろう。

Ⅲは連続体近似の問題。テーマは見慣れないが、誘導が丁寧なため、順を追って解いていけば問 6 の考察以外は難しくない。

【　解　答　】

Ⅰ

問 1 ③・⑥　　問 2 3.7×10^{3}[m]

問 3 (a) ア：12　イ：13　ウ：14　エ：6　オ：7

(b) カ：①　キ：⑤

(c) 1.9×10^{4} 年

Ⅱ

問 1 (a) CV_0　(b) $1/2\pi\sqrt{LC}$　(c) I　(d) $-Q/LC$

問 2 (e) I_3　(f) $-L\frac{\Delta I_1}{\Delta t}-L_3\frac{\Delta I_3}{\Delta t}$、$-L\frac{\Delta I_2}{\Delta t}-L_3\frac{\Delta I_3}{\Delta t}$

(g) $-\frac{Q_{全}}{(L+2L_3)C}$　(h) $1/2\pi\sqrt{(L+2L_3)C}$　(i) $(q_1+q_2)\cos\left(2\pi f_{全}t\right)$

(j) $I_{差}$、$-Q_{差}/LC$　(k) $1/2\pi\sqrt{LC}$　(l) $(q_1-q_2)\cos\left(2\pi f_{差}t\right)$

(m) 0　(n) うなり

Ⅲ

問 1 $2DRP$、y 軸正方向

問 2 (a) $\frac{mv^2}{2r\sin\pi/n}$　(b) ρv^2　(c) $\rho v^2/r$

問 3 $\boxed{ア}$ mv　$\boxed{イ}$ s/v　$\boxed{ウ}$ mv^2/s　$\boxed{エ}$ ρv^2

問 4 (e) $2\rho v^2$　(f) $\frac{v^2}{2g}-\frac{H}{2}$

問 5 想定 1：$v=\sqrt{2gH}$、$L=H/2$　　想定 2：$v=\sqrt{gH}$、$L=0$

問 6 解説参照

【 解 説 】

Ⅰ

問1 人間の可聴域は、およそ 20 Hz から 20 kHz である。

問2 円柱の底面積を S とし、密度を ρ とすると、自重で崩壊しない条件は、

$$\frac{\rho g S r}{S} \leqq 1.0\times 10^{8}[\mathrm{N}] \Leftrightarrow r \leqq 3.7\times 10^{3}[\mathrm{m}]$$

問3 (a) 天然に存在する炭素の同位体は存在比順に ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$、${}^{13}_{6}\mathrm{C}$、${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ である。また、窒素の原子番号は 7 である。

(b) β 崩壊は電子を放出する。また、原子番号と質量数の保存を考えると、核反応により水素原子が生まれる。

(c) ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ の存在比は ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ に比べて十分小さいので、単純に ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ の量が 1/10 となったと考えてよい。よって、経過した年数は、半減期の公式より

$$\frac{1}{10}N_0 = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

に数値代入して

$$5.7\times 10^{3}\times\frac{\log_{10}10}{\log_{10}2} = 1.9\times 10^{4} \text{ 年}$$

Ⅱ

問1 (a) 長時間充電すると、電源の電圧とコンデンサーの電圧が等しくなるので、$q_0 = CV_0$

(b) 固有周波数は、$1/2\pi\sqrt{LC}$

(c) 電流の正方向はコンデンサーの電気量が増える方向なので、

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I$$

(d) コイルの誘導起電力は$-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ であり、これがコンデンサーの電圧 Q/C に等しいので、

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{Q}{LC}$$

問2 (e) (c)と同様に考えると、

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta t} = I_i (i = 1,2)$$

であるから、キルヒホッフの法則 $I_1 + I_2 = I_3$ とより、

$$\frac{\Delta Q_{全}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} + \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = I_1 + I_2 = I_3$$

(f) (d)と同様に、二つのコイルの誘導起電力とコンデンサーの電圧が等しいことを考えると、

$$\frac{Q_1}{\mathrm{C}} = -L\frac{\Delta I_1}{\Delta t} - L_3\frac{\Delta I_3}{\Delta t}, \quad \frac{Q_2}{\mathrm{C}} = -L\frac{\Delta I_2}{\Delta t} - L_3\frac{\Delta I_3}{\Delta t}$$

(g) (f)の二式の和、およびキルヒホッフの法則 $\Delta I_1 + \Delta I_2 = \Delta I_3$ を考えれば、

$$\frac{\Delta I_3}{\Delta t} = -\frac{Q_{全}}{(L + 2L_3)C}$$

(h) $Q_{全}$は、問 1 で $L \to L + 2L_3$ とした式に従うので、固有周波数も同様にパラメータを変更すればよく、

$$f_{全} = 1/2\pi\sqrt{(L + 2L_3)C}$$

(i) 初期条件は合計電気量 $q_1 + q_2$、電流 0 であるから、$Q_{全} = (q_1 + q_2)\cos\left(2\pi f_{全} t\right)$

(j)

$$\frac{\Delta Q_{差}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} - \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = I_{差}$$

$$\frac{Q_1}{\mathrm{C}} - \frac{Q_2}{\mathrm{C}} = -L\left(\frac{\Delta I_1}{\Delta t} - \frac{\Delta I_2}{\Delta t}\right) \Rightarrow \frac{\Delta I_{差}}{\Delta t} = -\frac{Q_{差}}{LC}$$

(k) $Q_{差}$は、問 1 と同じ常微分方程式に従うので、$f_{差} = 1/2\pi\sqrt{LC}$

(l) 初期条件として電気量 $q_1 - q_2$、電流 0 であるので、$Q_{差} = (q_1 - q_2)\cos\left(2\pi f_{差} t\right)$

(m) $Q_{全}$ が恒等的に 0 となり、それにより $I_3 = I_1 + I_2$ も恒等的に 0 となる。

(n) $f_{全}$と$f_{差}$という異なった周波数の音の合成なので、音波はそれら 2 つの周波数の差を周波数に持つ包絡線を作る。これにより、音の強度が周期的に変化する。これをうなりという。

Ⅲ

問1 対称性より、合力の x 成分は 0 となる。半円部分に加わる圧力の合力の y 成分の大きさは上面に加わる圧力の合力に等しいので、上面の面積が $2DR$ であることから、求める力はy 軸正方向に $2DRP$ である。

問2 (a) 質点と共に動く非慣性系で考える。遠心力と糸の張力の中心方向成分の合力がつり合うことから、

$$2T\sin\frac{\pi}{n}=\frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad T=\frac{mv^2}{2r\sin(\pi/n)}$$

(b) 長さ $2\pi r$ あたり質量 nm の一様な質量を持つ紐であると近似できるので、$m=2\pi r\rho/n$ となり、

$$T=\frac{\left(\frac{2\pi r\rho}{n}\right)\cdot v^2}{2r\sin\pi/n}\to\rho v^2(n\to\infty)$$

(c) 微小な円弧の長さ l とすると、その質量は ρl であり、遠心力は $\rho l v^2/r$ である。これを円弧の長さで割って、単位長さあたりの遠心力の大きさは、$\rho v^2/r$ である。

問3 $\boxed{ア}$ 撃力により運動量 mv を与えればよく、これが求める力積である。

$\boxed{イ}$ s だけ引き上げるのにかかる時間は、s/v である。

$\boxed{ウ}$ 単位時間あたりの力積を求めればよく、$\boxed{ア}/\boxed{イ}$ より、mv^2/s である。

$\boxed{エ}$ $m/s\to\rho$ とすればよく、ρv^2 である。

(d) 紐の速度は一定で、質量が単位時間あたり ρv 増えるので、紐の運動エネルギーは単位時間あたり $\rho v^3/2$ だけ増えることになる。一方、外力は単位時間あたり v の長さに働くので、単位時間あたりの外力のする仕事は、ρv^3 である。すなわち、外力のする仕事のちょうど半分が紐の運動エネルギーとなり、残りは熱エネルギーなどとして放出される。

問4 (e) 問 2 (c) より、単位長さあたりに働く遠心力は $\rho v^2/r$ である。一方、この合力の鉛直上向き成分は、問 1 と同様にして、単位長さあたりの力に $2r$ をかければ求められることがわかる。合力は対称性より鉛直上向き成分しか持たないので、求める合力の大きさは $2\rho v^2$ である。

(f) 上昇および落下している紐の長さの合計は $2L+H$ であり、これに働く重力の大きさと紐に働く外力の合計と、前問の力の大きさを比較することで、

$$2\rho v^2=\rho(2L+H)g+\rho v^2 \quad \Rightarrow \quad L=\frac{v^2}{2g}-\frac{H}{2}$$

問5 想定 1：単位時間あたり 質量 ρv の紐が移動するので、単位時間あたりに紐が失う位置エネルギーは ρvgH である。一方、紐が床に衝突して失う運動エネルギーは単位時間あたり $\rho v^3/2$ であるから、これらが一致することより、$v=\sqrt{2gH}$ である。これを(f)に代入して、$L=H/2$ である。

想定 2：落下する紐の張力は、仮定よりρgH である。上昇している紐の張力は、(d)よりρv^2 である。これらが一致することより、$v=\sqrt{gH}$ である。よって、これを(f)に代入して$L=0$ である。

問6 想定 1：力学的エネルギーが保存するという仮定は、問 3 (d) の考察より、誤っていることがわかる。

想定 2：落下している部分系を考える。この系は落下する瞬間床から撃力を受けており、しかもそれにより停止することから，この系が等速運動する系とみなすためには，重力と張力の大きさが等しいとする仮定が誤っていることがわかる。

お問い合わせは☎0120-３０２-８７２

https://keishu-kai.com/