解答速報　物理

2024 年度　東京大学

【　講　評　】

全体的にやや計算量が多いが、難しい考察を要求される箇所はほとんどなく、時間との勝負になったであろう。

第１問はベルトコンベア上の二体問題。重心系による考察は難関大学では頻出であり、典型として処理したい。

第２問はコンデンサーと単振動の問題。どのような電場が現れるか見えてさえいれば単なる計算問題である。

第３問は移動する観測者と音源によるうなりの問題。計算量も比較的少なく、誘導も非常に丁寧であるため、これは完答したい。

【　解　答　】

第１問

Ⅰ　(1) $\dfrac{v_0^2}{2g(\sin\theta_1+\mu'\cos\theta_1)}$　　(2) $-v_0\sqrt{\dfrac{\sin\theta_1-\mu'\cos\theta_1}{\sin\theta_1+\mu'\cos\theta_1}}$

Ⅱ　(1) $\begin{cases}(\mu'\cos\theta_2-\sin\theta_2)\,gt & (0\leqq t<V/(\mu' g\cos\theta_2-g\sin\theta_2))\\ V & (t\geqq V/(\mu' g\cos\theta_2-g\sin\theta_2))\end{cases}$　　(2) v_0

Ⅲ　(1) $\dfrac{mg\sin\theta_3}{k}$　　(2) $2\tan\theta_3$　　(3) $V/2$

(4) $\dfrac{V}{2}\left(1+\cos\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}\,t\right)\right)$, $\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$　　(5) $V\left(1-\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right)$　　(6) $\mu\geqq 2\tan\theta_3+\dfrac{V\sqrt{k/m}}{g\cos\theta_3}$

第２問

Ⅰ　(1) $-\dfrac{Qd}{\varepsilon L^2}$　　(2) $Q/2$　　(3) $h_0-\dfrac{Q^2}{8\varepsilon_0L^2k}$　　(4) $\dfrac{Q}{2\varepsilon_0L^2}\left(h_0-\dfrac{Q^2}{8\varepsilon_0L^2k}\right)$

Ⅱ　(1) $2h_0-\dfrac{Q^2}{4\varepsilon_0L^2k}$　　(2) $\dfrac{Q^2}{25L^2}\left(\dfrac{3h_1}{\varepsilon_0}-\dfrac{4d}{\varepsilon}\right)$ もしくは $\dfrac{Q^2h}{10\varepsilon_0L^2}$　　(3) $\dfrac{3Q^2}{25\varepsilon_0L^2g}$　　(4) $\dfrac{3Q^2h_1}{25\varepsilon_0L^2}$

第３問

Ⅰ　(1) $\dfrac{L}{V}\left(2-\dfrac{v_s}{V}\right)$　　(2) $\left(1-\dfrac{v_s}{V}\right)\dfrac{1}{f_0}$　　(3) $\dfrac{2v_s}{V-v_s}f_0$　　(4) $\dfrac{L}{2v_s}$,　$\dfrac{2v_sV}{V^2-v_s^2}f_0$

Ⅱ　(1) $\dfrac{VT}{2}\dfrac{f_h}{f_1}$　　(2) $\left(\dfrac{4v_r}{V-v_r}+\dfrac{2L_A}{VT}\right)f_1$　　(3) $\left(\dfrac{2L_B}{VT}-\dfrac{2v_r}{V-v_r}\left(1+\dfrac{t_s}{T}\right)\right)f_1$

(4) $\dfrac{6v_r}{V-v_r}f_1$　　(5) 0.94 [m/s]

【 解 説 】

第１問

Ⅰ

(1) 求めるx座標をx_1とする。垂直抗力が$mg\cos\theta_1$であることおよび最高点での速度は 0 であることから、力学的エネルギーと動摩擦力の仕事を考えて、

$$\frac{mv_0^2}{2}-\mu' mgx_1\cos\theta_1=mgx_1\sin\theta_1 \ \Rightarrow\ x_1=\frac{v_0^2}{2g(\sin\theta_1+\mu'\cos\theta_1)}$$

(2) 求める速度をv_1とする。初期状態と戻ったときをエネルギーと仕事の関係により比較すれば、$v_1<0$より

$$\frac{mv_0^2}{2}-2\mu' mgx_1\cos\theta_1=\frac{mv_1^2}{2} \ \Rightarrow\ v_1=-v_0\sqrt{\frac{\sin\theta_1-\mu'\cos\theta_1}{\sin\theta_1+\mu'\cos\theta_1}}$$

Ⅱ

(1) 斜面上向きに移動し始めたということは、加速度は正である。働く力が一定であることを考えると、この物体はベルトに対して静止するまで等加速度運動を続ける。その加速度a_2は、次の運動方程式を満たす。

$$ma_2=\mu' mg\cos\theta_2-\ mg\sin\theta_2$$

初速 0 でこの加速度で速度Vになるまで運動を続けることから、求める速度は、

$$\begin{cases}(\mu'\cos\theta_2-\ \sin\theta_2)\,gt & (0\leqq t<V/(\mu' g\cos\theta_2-\ g\sin\theta_2))\\ V & (V/(\mu' g\cos\theta_2-\ g\sin\theta_2)<t)\end{cases}$$

(2) $0<v_0<V$ が成立することから、再び戻ってくるまでは、下降と上昇で対称性が成立する等加速運動をするので、求める速度はv_0である。

Ⅲ

(1) 物体 B についての力のつり合いを考えれば、

$$mg\sin\theta_3=kd_0 \ \Rightarrow\ d_0=\frac{mg\sin\theta_3}{k}$$

(2) 物体 A についての力のつり合いと(1)を考えれば、

$$\mu' mg\cos\theta_3=mg\sin\theta_3+kd_0 \ \Rightarrow\ \mu'=2\tan\theta_3$$

(3) 物体 A と B の二物体系に働く外力は、ベルトからの動摩擦力と重力であり、そのx成分は

$$\mu' mg\cos\theta_3-2mg\sin\theta_3$$

であり、(2)より、これは 0 に等しい。よって、重心は等速運動をする。重心速度の初速が$V/2$であることから、 $v_G=V/2$

(4) 重心系から見ると、B は初速$V/2$で、重心系での変位x'_B、加速度a'_Bについて運動方程式

$$ma'_B=-2kx'_B$$

が成立することから、重心系での速度は$v'_B=(V/2)\cos(\sqrt{2k/m}\ t)$ となることがわかる。また、物体 A がベルトと同じ速度となるのは、$v'_B=-V/2$ となる瞬間であることがわかるので、

$$v_B=v_G+v'_B=\frac{V}{2}\left(1+\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\ t\right)\right)$$

$$t_1=\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

(5) 物体 A が静止した瞬間、物体 B の物体 A に対する速度は$-V$であり、そのときのばねののびはつり合いの位置である。よって、物体 B の物体 A に対する相対速度の振幅はVとなり、

$$v_B = V\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_1)\right)\right) = V\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

(6) 物体 A に働く力が最も大きくなるのは、ばねの伸びが最も大きくなる瞬間であり、物体 B の振幅は $V\sqrt{m/k}$ となることから、ばねの最大の伸びは$d_0+V\sqrt{m/k}$である。よって、求める条件は、

$$k\left(d_0+V\sqrt{\frac{m}{k}}\right)+mg\sin\theta_3 \leqq \mu mg\cos\theta_3 \quad\Rightarrow\quad \mu \geqq 2\tan\theta_3+\frac{V\sqrt{k/m}}{g\cos\theta_3}$$

第２問

Ⅰ

(1) $-2d < z < -d$ での電場のz成分は、電荷がQであることから、$Q/\varepsilon L^2$である。よって、下電極を基準としたとき、求める電位は、

$$-\frac{Qd}{\varepsilon L^2}$$

(2) 対称性より、$Q/2$

(3) 下電極の電荷は$-Q/2$であるので、上電極が力を受ける電場は下極板の作る$Q/4\varepsilon_0 L^2$である。よって、上電極が電場から受ける力は$Q/2 \times Q/4\varepsilon_0 L^2 = Q^2/8\varepsilon_0 L^2$であるので、これとばねの力のつり合いより、求める$z$座標$z_1$として、

$$\frac{Q^2}{8\varepsilon_0 L^2} = k(h_0 - z_1) \Rightarrow \quad z_1 = h_0 - \frac{Q^2}{8\varepsilon_0 L^2 k}$$

(4) $z = 0$での電位は 0 となり、$0 < z < z_1$ での電場のz成分は$-Q/2\varepsilon_0 L^2$であるので、求める電位は、

$$\frac{Q}{2\varepsilon_0 L^2} \times z_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 L^2}\left(h_0 - \frac{Q^2}{8\varepsilon_0 L^2 k}\right)$$

Ⅱ

(1) z_1を中心とした単振動をすることから、

$$h_1 = 2z_1 = 2h_0 - \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 L^2 k}$$

(2) 上電極の電荷がQ'であるときのエレクトレットに蓄えられたエネルギーを$U(Q')$とする。このとき、$-2d < z < -d$ での電場の大きさは$|Q - Q'|/\varepsilon L^2$、$-d < z < 0$ での電場の大きさは$|Q'|/\varepsilon L^2$、$0 < z < h_1$ での電場の大きさは$|Q'|/\varepsilon_0 L^2$であるので、

$$U(Q') = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{|Q'|}{\varepsilon L^2}\right)^2 L^2 d + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{|Q - Q'|}{\varepsilon L^2}\right)^2 L^2 d + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{|Q'|}{\varepsilon_0 L^2}\right)^2 L^2 h_1 = \frac{Q'^2}{2L^2}\left(\frac{d}{\varepsilon} + \frac{h_1}{\varepsilon_0}\right) + \frac{(Q - Q')^2}{2L^2}\frac{d}{\varepsilon}$$

よって、求める発熱量は、

$$U\left(\frac{Q}{2}\right) - U\left(\frac{Q}{10}\right) = \frac{Q^2}{100L^2}\left(\frac{12h_1}{\varepsilon_0} - \frac{16d}{\varepsilon}\right) = \frac{Q^2}{25L^2}\left(\frac{3h_1}{\varepsilon_0} - \frac{4d}{\varepsilon}\right)$$

※ スイッチを閉じた後の定常状態の電圧の関係より

$$\frac{9Q/10}{\varepsilon L^2}d = \frac{Q/10}{\varepsilon L^2}d + \frac{Q/10}{\varepsilon L^2}h_1 \quad \therefore \frac{\varepsilon h_1}{\varepsilon_0 d} = 8$$

を用いると

$$\frac{Q^2}{25L^2}\left(\frac{3h_1}{\varepsilon_0} - \frac{4d}{\varepsilon}\right) = \frac{Q^2 h}{10\varepsilon_0 L^2}$$

(3) おもりが乗っている場合の単振動の中心がz_1のままであることから、上極板に働く力がz_1でつり合う。よって、電荷が 1/5 になっていることから、求める質量Mは、

$$\frac{k(h_0 - z_1)}{25} + Mg = k(h_0 - z_1) \quad \Rightarrow \quad M = \frac{3Q^2}{25\varepsilon_0 L^2 g}$$

(4) 外部からエレクトレットにされた仕事はおもりがした仕事だけである。よって、求める発熱量は、

$$Mgh_1 = \frac{3Q^2h_1}{25\varepsilon_0 L^2}$$

第３問

Ⅰ

(1)　時刻$t_1 = L/V$では、音源は$v_s t_1$にいるので、求める時刻は、

$$t_1 + \frac{L - v_s t_1}{V} = \frac{L}{V}\left(2 - \frac{v_s}{V}\right)$$

(2)　音源が音を発した時刻が$\frac{1}{f_0}$だけずれればよいので、任意の時刻tからのずれを考えて、

$$\left(t + \frac{1}{f_0} + \frac{L - v_s(t + 1/f_0)}{V}\right) - \left(t + \frac{L - v_s t}{V}\right) = \left(1 - \frac{v_s}{V}\right)\frac{1}{f_0}$$

(3)　反射板が観測する振動数は$Vf_0/(V - v_s)$であり、ここから観測者は$(V + v_s)f_0/(V - v_s)$ の振動数の音波を観測する。これとf_0の振動数の音のうなりを観測者は観測するので、求めるうなりの振動数は、

$$\left|\frac{V + v_s}{V - v_s}f_0 - f_0\right| = \frac{2v_s}{V - v_s}f_0$$

(4)　うなりが観測され始めるのは、観測者を音源が超えた時刻であるから、その時刻は$L/2v_s$である。以降、観測者は$Vf_0/(V - v_s)$と$Vf_0/(V + v_s)$の振動数の音波を同時に観測するので、うなりの振動数は、

$$\left|\frac{V}{V - v_s}f_0 - \frac{V}{V + v_s}f_0\right| = \frac{2v_s V}{V^2 - v_s^2}f_0$$

Ⅱ

(1)　反射板を経由して観測する音は、$2L_0/V$だけ前の時刻に音源から発せられた音であるから、任意の時刻tからのずれを考えて、

$$f_h = \left|\left(2 - \frac{t - 2L_0/V}{T}\right)f_1 - \left(2 - \frac{t}{T}\right)f_1\right| = \frac{2L_0}{VT}f_1 \ \Rightarrow\ L_0 = \frac{VT}{2}\frac{f_h}{f_1}$$

(2)　時刻 0 で音源から発せられた音の周波数は$2f_1$であり、その音が届く時刻は$2L_A/V$であるから、うなりの振動数は、

$$\left|\frac{V + v_r}{V - v_r}\cdot 2f_1 - \left(2 - \frac{2L_A/V}{T}\right)f_1\right| = \left(\frac{4v_r}{V - v_r} + \frac{2L_A}{VT}\right)f_1$$

(3)　前問と同様にして、$L_0/V \ll T$と$v_r < L_0/4T$に注意すれば、

$$\left|\frac{V + v_r}{V - v_r}\left(1 + \frac{t_s}{T}\right)f_1 - \left(1 + \frac{t_s + 2L_B/V}{T}\right)f_1\right| = \left(\frac{2L_B}{VT} - \frac{2v_r}{V - v_r}\left(1 + \frac{t_s}{T}\right)\right)f_1$$

(4)　(2),(3)の結果を用いて、音波の到達した位置を$x = L$とすれば、

$$\Delta f_h = \left|\left(\frac{4v_r}{V - v_r} + \frac{2L}{VT}\right) - \left(\frac{2L}{VT} - \frac{2v_r}{V - v_r}\right)\right|f_1 = \frac{6v_r}{V - v_r}f_1$$

(5)　与えられた数値を代入すると、

$$v_r = \frac{V\Delta f_h}{6f_1 + \Delta f_h} \fallingdotseq \frac{(3.4 \times 10^2\ [\mathrm{m/s}]) \times (5.0 \times 10^2\ [\mathrm{Hz}])}{1.8 \times 10^5\ [\mathrm{Hz}]} \fallingdotseq 0.94\ [\mathrm{m/s}]$$