解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　東京大学（理科）

【　講　評　】

例年通り，大問６題での出題であった．出題分野も空間図形（空間座標），微分法・積分法，確率，整数の性質と例年通りであり，対策ができていた人は安心して取り組める試験であっただろう．第１問，第２問，第５問は時間をかけてでも完答し，残りの問題で部分点を稼げるとよいだろう．

１．空間座標【やや易】

空間座標内の点の存在領域を求める問題であった．定石通り，同値変形に注意してベクトルの内積で処理すればよい．計算量も少ないので，これは完答したい問題である．

２．数学Ⅲ微分法・積分法【標準】

絶対値関数の定積分の最大・最小値を求める定石問題であった．やや計算が煩雑であるが，解法に困る問題ではないので，少し多めに時間を割いてでも完答したい問題である．

３．確率【標準】

漸化式を利用して確率を求める頻出問題であった．各点に関する確率を考えると煩雑になるため，(2) をヒントに対称性を利用することがポイントとなる．完答が無理であったとしても，(1)，(2) を確実に解き，部分点を稼ぎたい．

４．図形と方程式／微分法【標準】

前半は円と放物線が接する条件を考える定石問題であった．後半は方程式の解の個数を考えるだけであるが，計算を工夫しないとかなり煩雑になる．制限時間との兼ね合いで，どこまで得点するかを判断すればよいだろう．

４．積分法／空間座標【やや易】

空間座標内の三角形を回転させて得られる立体の体積を求める問題であった．比較的図形が単純であることと，東大では何度も出題されている頻出テーマであるため，類題を解いた経験も豊富にあるだろう．ここは完答したい．

６．整数の性質【やや難】

(1) は多項式が素数となるときを考える典型問題で，ここは落とせない．(2) も (1) と考えることは同じであるが，整数 n が３個以下ということをどのようなプロセスで示すかが難しい．ここは完答できなくてもよいだろう．

【　解　説　】

第１問

点Pは xy 平面上の点であるから，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ とおける．

ただし，(ⅰ) より $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$　…① である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ 0)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{x^2+y^2+0}=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0-y+0=-y$$

$\angle\mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\cos\angle\mathrm{AOP} \geqq -\dfrac{1}{2}$ であるから，(ⅱ) は以下の条件に同値である．

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} \leqq -\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leqq -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\,y \geqq \sqrt{x^2+y^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{2}\,y \geqq 0 \\ 2y^2 \geqq x^2+y^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geqq 0 \\ (y-x)(y+x) \geqq 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots②
\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(0,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y+1,\ -1)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}$$

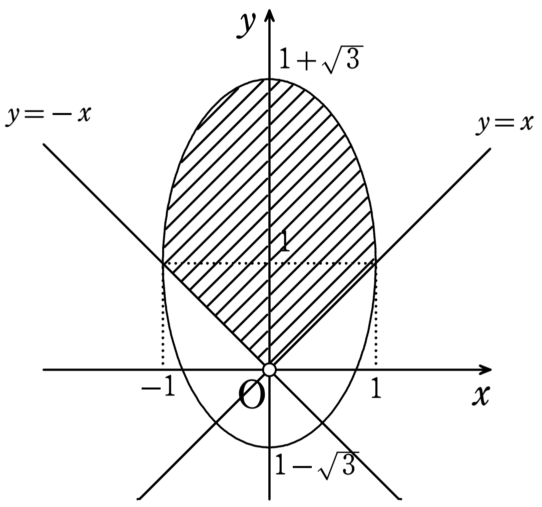
$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0+y+1+1=y+2$$

$\angle\mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\angle\mathrm{OAP} \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，(ⅲ) は以下の条件に同値である．

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y+2 \geqq 0 \\ 2(y+2)^2 \geqq 3\{x^2+(y+1)^2+1\} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geqq -2 \\ x^2+\dfrac{(y-1)^2}{3} \leqq 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots③
\end{aligned}$$

したがって，点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ がとりうる範囲は ① かつ ② かつ ③ であるから，これを図示すると，

下の図の斜線部分となる．



第２問

(1)　$0 \leqq t \leqq 1$ において，$0 \leqq x \leqq 1$ を満たすある実数 x について，

$0 \leqq t \leqq x$ のとき，$t-x \leqq 0$，　$t \leqq x \leqq 1$ のとき，$t-x \geqq 0$

であるから，

$$f(x) = -\int_0^x \frac{t-x}{1+t^2}\,dt + \int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}\,dt$$
$$= -\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt + x\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_x^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt - x\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

これを x で微分すると，

$$f'(x) = -\frac{x}{1+x^2} + 1\cdot\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + x\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} - 1\cdot\int_x^1 \frac{1}{1+t^2} - x\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

よって，

$$f'(\tan\alpha) = \int_0^{\tan\alpha} \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_{\tan\alpha}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

ここで，$t=\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+t^2,$$

t	$0 \to \tan\alpha$
θ	$0 \to \alpha$

，

t	$\tan\alpha \to 1$
θ	$\alpha \to \frac{\pi}{4}$

であるから，

$$f'(\tan\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\alpha} 1\,d\theta - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta$$
$$= \Big[\theta\Big]_0^{\alpha} - \Big[\theta\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} = 2\alpha - \frac{\pi}{4}$$

したがって，$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ であるから，

$$f'(\tan\alpha)=0 \iff 2\alpha-\frac{\pi}{4}=0 \qquad \therefore\ \alpha=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

(2)　$$\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{8}}{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \frac{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ より $\tan\alpha=\tan\frac{\pi}{8}>0$ であるから，

$$\tan\alpha = \boldsymbol{\sqrt{2}-1}$$

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$x=\tan\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおけるから，(1) より，

$$f'(x)=f'(\tan\theta)=2\theta-\frac{\pi}{4}$$

よって，$f'(x)$ と $2\theta-\dfrac{\pi}{4}$ の符号は一致するから，$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，

$$f(0)=\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt=\left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2\,,$$

$$\begin{aligned} f(1)&=-\int_0^1 \frac{t-1}{1+t^2}\,dt=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$

であり，$0.6<\log 2<0.7$，$3<\pi$ であるから，

$$\begin{aligned} f(0)-f(1)&=\frac{1}{2}\log 2-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right) \\ &=\log 2-\frac{\pi}{4} \\ &<0.7-\frac{3}{4}=-0.05<0 \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $x=1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2}$ をとる．

また，$x=\sqrt{2}-1=\tan\alpha$ のとき，

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}-1)&=f(\tan\alpha) \\ &=\int_0^{\tan\alpha} \frac{\tan\alpha-t}{1+t^2}\,dt+\int_{\tan\alpha}^1 \frac{t-\tan\alpha}{1+t^2}\,dt \\ &=\Big[\theta\Big]_0^{\alpha}\tan\alpha-\left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^{\tan\alpha}+\left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_{\tan\alpha}^1-\Big[\theta\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\tan\alpha \\ &=\alpha\tan\alpha-\frac{1}{2}\log(1+\tan^2\alpha)+\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log(1+\tan^2\alpha)-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\tan\alpha \\ &=\frac{1}{2}\log 2-\log(1+\tan^2\alpha) \\ &=\log\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}-1)^2}=\log\frac{\sqrt{2}+1}{2} \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ は $x=\sqrt{2}-1$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$ をとる．

別解　$f'(x)$ の符号判定は，次のように行うこともできる．

（その１）

$f'(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$ について，

$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}-\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{2}{1+x^2}>0$$

よって，$0 \leqq x \leqq 1$ において $f'(x)$ は単調増加であり，

$$f'(0)=-\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt=-\frac{\pi}{4}<0,$$

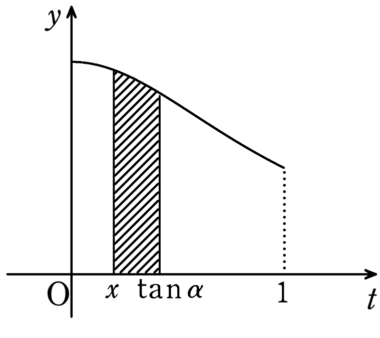
$$f'(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}>0$$

であるから，これと $f'(\tan\alpha)=0$ より，$f(x)$ の増減表が得られる．

（その２）

(1) より $0\leqq x\leqq 1$ のとき，

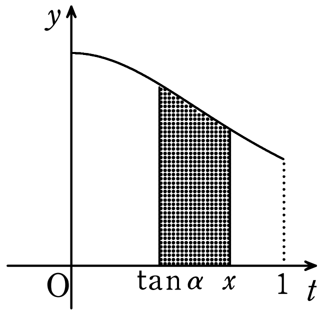
$$\begin{aligned}f'(x)&=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\\&=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\\&=\frac{\pi}{4}-2\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\end{aligned}$$



ここで，$\dfrac{1}{1+t^2}>0$ であるから，$0\leqq x<\tan\alpha$ のとき，

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt>\int_{\tan\alpha}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$$

よって，　$f'(x)<\dfrac{\pi}{4}-2\cdot\dfrac{\pi}{8}=0$



また，$\tan\alpha<x\leqq 1$ のとき，

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt<\int_{\tan\alpha}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{8}$$

よって，　$f'(x)>\dfrac{\pi}{4}-2\cdot\dfrac{\pi}{8}=0$

別解　$f(x)$ は次のように求めることもできる．

(2) より，$x=\tan\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ とすると，$f'(x)=f'(\tan\theta)=2\theta-\dfrac{\pi}{4}$ であるから，ある定数 C が存在して，

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)\,dx=\int\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta\\&=\int\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\tan\theta)'\,d\theta\\&=\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\tan\theta-\int 2\tan\theta\,d\theta\\&=\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\tan\theta+2\log|\cos\theta|+C\end{aligned}$$

$f(0)=\dfrac{1}{2}\log 2$ であるから　　$C=\dfrac{1}{2}\log 2$

したがって，　$f(x)=\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\theta+2\log|\cos\theta|+\dfrac{1}{2}\log 2$

第３問

(1)　点 $(a,\ b)$ について，

　x 軸に関して対称移動すると $(a,\ -b)$，

　y 軸に関して対称移動すると $(-a,\ b)$，

　$y=x$ に関して対称移動すると $(b,\ a)$，

　$y=-x$ に関して対称移動すると $(-b,\ -a)$

となる．点Pは最初 $(2,\ 1)$ にあるから，これらの移動によって推移する点を考えると，

　　$(\pm 1,\ \pm 2)$，$(\pm 2,\ \pm 1)$　(複号任意)

(2)　点Pが n 秒後に $(x,\ y)$ にいる確率を $P_n(x,\ y)$ と表す．

$P_0(2,\ 1)=1$ とすると，任意の自然数 n について

$$\begin{aligned}P_n(2,\ 1)&=\frac{1}{3}P_{n-1}(2,\ -1)+\frac{1}{3}P_{n-1}(-2,\ 1)+\frac{1}{6}P_{n-1}(1,\ 2)+\frac{1}{6}P_{n-1}(-1,\ -2)\\&=P_n(-2,\ -1)\end{aligned}$$

が成立する．（証明終）

(3)　n 秒後に $(|a|,\ |b|)=(2,\ 1)$ となる確率を p_n とする．点Pは最初 $(2,\ 1)$ にあるから，$p_0=1$ とする．

n 秒後に $(|a|,\ |b|)=(2,\ 1)$ となるのは，

　$n-1$ 秒後に $(|a|,\ |b|)=(2,\ 1)$ であり，x 軸または y 軸に関する対称移動が起こる，

　$n-1$ 秒後に $(|a|,\ |b|)=(1,\ 2)$ であり，$y=x$ または $y=-x$ に関する対称移動が起こる

のいずれかであるから，

$$\begin{aligned}p_n&=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)p_{n-1}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)(1-p_{n-1})\\&=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

これを変形すると，　$p_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$

$\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は等比数列であるから，

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(p_0-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\qquad\therefore\quad p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

また，$(|a|,\ |b|)$ について，

　n が偶数のときは $(2,\ 1)$，$(-2,\ -1)$，$(1,\ -2)$，$(-1,\ 2)$，

　n が奇数のときは $(2,\ -1)$，$(-2,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(-1,\ -2)$

であることと，(2) より点Pが n 秒後に $(2,\ 1)$，$(-2,\ -1)$ にある確率は等しいから，求める確率は

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}p_n & (n\text{ は偶数})\\ 0 & (n\text{ は奇数})\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\} & (\boldsymbol{n}\textbf{ は偶数})\\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n}\textbf{ は奇数})\end{cases}$$

別解　点Pが n 秒後に (1) で求めた８点にある確率を考えてもよい．

n 秒後に $(2,\ 1)$，$(2,\ -1)$，$(1,\ 2)$，$(-1,\ 2)$，$(-2,\ -1)$，$(-2,\ 1)$，$(-1,\ -2)$，$(1,\ -2)$ にいる確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n，t_n，u_n，v_n，w_n とおくと，(2) より

$$p_n=t_n,\quad q_n=u_n,\quad r_n=v_n,\quad s_n=w_n$$

であるから，次の漸化式が成り立つ．

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{6}r_n+\frac{1}{6}v_n=\frac{2}{3}q_n+\frac{1}{3}r_n \quad \cdots\cdots ①$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}t_n+\frac{1}{6}s_n+\frac{1}{6}w_n=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}s_n \quad \cdots\cdots ②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}w_n+\frac{1}{3}s_n+\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}t_n=\frac{2}{3}s_n+\frac{1}{3}p_n \quad \cdots\cdots ③$$

$$s_{n+1}=\frac{1}{3}v_n+\frac{1}{3}r_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{6}u_n=\frac{2}{3}r_n+\frac{1}{3}q_n \quad \cdots\cdots ④$$

①＋④ より

$$p_{n+1}+s_{n+1}=q_n+r_n \quad \cdots\cdots ⑤$$

②＋③ より

$$q_{n+1}+r_{n+1}=p_n+s_n \quad \cdots\cdots ⑥$$

よって，⑤，⑥ より

$$p_{n+2}+s_{n+2}=q_{n+1}+r_{n+1}=p_n+s_n \quad \cdots\cdots ⑦$$

また，①－④ より　$p_{n+1}-s_{n+1}=\frac{1}{3}(q_n-r_n)$　……⑧

②－③ より　$q_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{3}(p_n-s_n)$　……⑨

よって，⑦，⑧ より，

$$p_{n+2}-s_{n+2}=\frac{1}{3}(q_{n+1}-r_{n+1})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(p_n-s_n)=\frac{1}{9}(p_n-s_n) \quad \cdots\cdots ⑩$$

(i) n が奇数のとき

⑦ より　$p_n+s_n=p_1+s_1=0$，

⑩ より　$p_n-s_n=(p_1-s_1)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}=0$

よって，　$p_n=s_n=0$

(ii) n が偶数のとき

⑤，⑦ より　$p_n+s_n=p_2+s_2=q_1+r_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，

また，⑧，⑩ より

$$p_n-s_n=(p_2-s_2)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\frac{1}{3}(q_1-r_1)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

これらの和をとると，　$2p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$　　$\therefore$　$p_n=\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

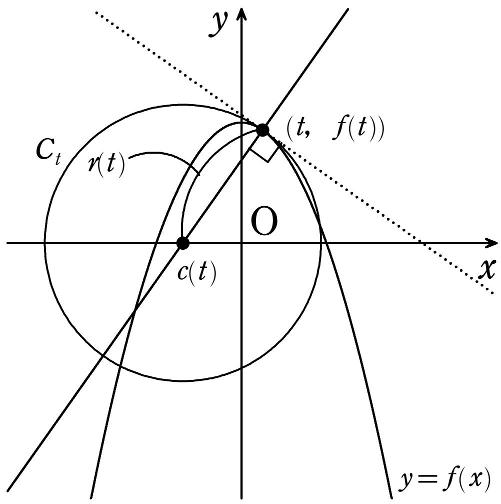
以上により，求める確率は　$p_n=\begin{cases}\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} & (n\text{ は偶数}) \\ 0 & (n\text{ は奇数})\end{cases}$

第４問

C_t は中心 $(c(t),\ 0)$，半径 $r(t)$ の円であるから，その方程式は次のようになる．

$$\{x-c(t)\}^2+y^2=\{r(t)\}^2 \quad \cdots\cdots①$$

(1)　$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$ について，　$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$



$0<t<4$ より，　$f'(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\neq 0$

よって，点 $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$$

これが円 C_t の中心 $(c(t),\ 0)$ を通るから，

$$0=-\frac{1}{f'(t)}\{c(t)-t\}+f(t)$$

$$c(t)=t+f'(t)f(t) \quad \cdots\cdots②$$

$$=t-\frac{\sqrt{2}}{2}t\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)=\boldsymbol{\frac{t^3}{4}-3t}$$

また，点 $(t,\ f(t))$ は円 C_t の方程式 ① を満たすから，

$$\{r(t)\}^2=\{t-c(t)\}^2+\{f(t)\}^2=\{-f'(t)f(t)\}^2+\{f(t)\}^2 \quad \cdots\cdots③$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}tf(t)\right\}^2+\{f(t)\}^2=\frac{1}{2}(t^2+2)\{f(t)\}^2$$

$$=\frac{1}{2}(t^2+2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{16}(t^2+2)(t^2-16)^2}$$

(2)　C_t が $(3,\ a)$ を通るとき，円 C_t の方程式 ① を満たすから，

$$\{3-c(t)\}^2+a^2=\{r(t)\}^2$$

②，③ を代入すると，

$$a^2=\{r(t)\}^2-\{3-c(t)\}^2$$

$$=\{f'(t)f(t)\}^2+\{f(t)\}^2-\{(3-t)-f'(t)f(t)\}^2$$

$$=\{f(t)\}^2-2(t-3)f'(t)f(t)-(t-3)^2$$

右辺を $g(t)$ とおくと，直線 $y=a^2$ $(0<a<f(3))$ と $y=g(t)$ のグラフの $0<t<4$ における異なる共有点の個数が求めるものであるから，以下これについて考える．

$f''(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より $f''(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，

$$g'(t)=2f'(t)f(t)-2f'(t)f(t)-2(t-3)f''(t)f(t)-2(t-3)\{f'(t)\}^2-2(t-3)$$

$$=-2(t-3)[f''(t)f(t)+\{f'(t)\}^2+1]$$

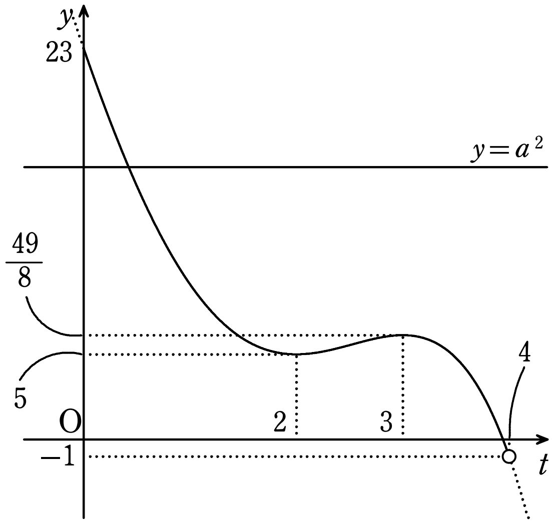
$$=-2(t-3)\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+1\right\}$$

$$=-2(t-3)\cdot\frac{3}{4}(t^2-4)$$

$$=-\frac{3}{2}(t-3)(t-2)(t+2)$$

$0<t<4$ における $g(t)$ の増減は次のようになる．

t	0		2		3		4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$		↘		↗		↘	



$a^2=\{r(t)\}^2-\{3-c(t)\}^2$
$\quad=\{f'(t)f(t)\}^2+\{f(t)\}^2-\{(3-t)-f'(t)f(t)\}^2$
$\quad=\{f(t)\}^2-2(t-3)f'(t)f(t)-(t-3)^2$

また，

$$g(0)=\{f(0)\}^2+6f'(0)f(0)-(-3)^2=32-9=23,$$

$$g(2)=\{f(2)\}^2+2f'(2)f(2)-(-1)^2=18-12-1=5,$$

$$g(3)=\{f(3)\}^2=\left\{\frac{7\sqrt{2}}{4}\right\}^2=\frac{49}{8},$$

$$g(4)=\{f(4)\}^2-2f'(4)f(4)-1=-1$$

$0<a<f(3)$ より $0<a^2<\{f(3)\}^2=\dfrac{49}{8}$ であるから，求める t の個数は，

$0<a^2<5$，すなわち $\boldsymbol{0<a<\sqrt{5}}$ **のとき 1 個**，

$a^2=5$，すなわち $\boldsymbol{a=\sqrt{5}}$ **のとき 2 個**，

$5<a^2<\dfrac{49}{8}$，すなわち $\boldsymbol{0<a<\dfrac{7\sqrt{2}}{4}}$ **のとき 3 個**

である．

第５問

Dは線分ACの中点であるから，　$D\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$

三角形ABDの周および内部の点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OD} \\ \alpha+\beta+\gamma=1 \\ 0\leqq\alpha\leqq1 \\ 0\leqq\beta\leqq1 \\ 0\leqq\gamma\leqq1 \end{cases}$$

となる実数 α，β，γ が存在する．

$$\overrightarrow{OP}=\alpha(1,\ 0,\ 0)+\beta(0,\ 1,\ 0)+\gamma\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\alpha+\frac{\gamma}{2},\ \beta,\ \frac{\gamma}{2}\right)$$

よって，　$x=\alpha+\frac{\gamma}{2}$，$y=\beta$，$z=\frac{\gamma}{2}$　　　$\therefore$　$\alpha=x-z$，$\beta=y$，$r=2z$

したがって，$P(x,\ y,\ z)$ について，　$\begin{cases} 0\leqq x-z\leqq1 \\ 0\leqq y\leqq1 \\ 0\leqq 2z\leqq1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$　が成り立つ．

このことから，平面 $x=t$ $(0\leqq t\leqq1)$ による断面は，

$$\begin{cases} 0\leqq t-z\leqq1 \\ 0\leqq y\leqq1 \\ 0\leqq 2z\leqq1 \\ t+y+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0\leqq z\leqq t \\ 0\leqq z\leqq 1-t \\ 0\leqq z\leqq\frac{1}{2} \\ y+z=1-t \end{cases} \quad\cdots\cdots①$$

によって表される線分である．

ここで，点 $P(t,\ y,\ z)$ と $O'(t,\ 0,\ 0)$ との距離を l とすると，　$y=(1-t)-z$ より，

$$l^2=y^2+z^2=\{(1-t)-z\}^2+z^2$$
$$=2z^2-2(1-t)z+(1-t)^2=2\left(z-\frac{1-t}{2}\right)^2+\frac{(1-t)^2}{2}$$

(Ⅰ) $0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$t\leqq1-t$ であるから，$0\leqq z\leqq t$ における l^2 の最大値は，

$$\frac{1-t}{2}-\frac{t}{2}=\frac{1-2t}{2}\geqq0 \quad \left(\because\ 0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)$$

より，$z=0$ のとき $(1-t)^2$ となる．

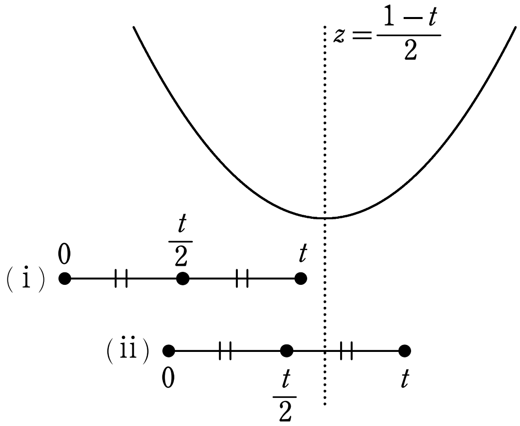
また，$0\leqq z\leqq t$ における l^2 の最小値について，

(ⅰ) $\frac{1-t}{2}\leqq t$，すなわち $\frac{1}{3}\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$z=\frac{1-t}{2}$ において，最小値 $\frac{(1-t)^2}{2}$ をとる．

(ⅱ) $t\leqq\frac{1-t}{2}$，すなわち $0\leqq t\leqq\frac{1}{3}$ のとき

$z=t$ において，最小値 $(1-2t)^2+t^2=5t^2-4t+1$ をとる．



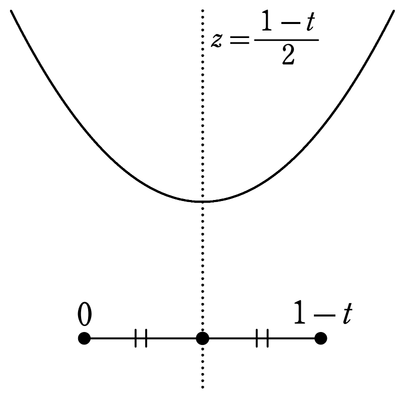
(Ⅱ) $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき

$1-t \leqq t$ であるから，$0 \leqq z \leqq 1-t$ において l^2 は，

$z=0$，$1-t$ のとき，最大値 $(1-t)^2$，

$z=\dfrac{1}{2}(1-t)$ のとき，最小値 $l^2=\dfrac{(1-t)^2}{2}$

をとる．



(Ⅰ)，(Ⅱ) をまとめると，

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　$5t^2-4t+1 \leqq l^2 \leqq (1-t)^2$，

$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq 1$ のとき　$\dfrac{(1-t)^2}{2} \leqq l^2 \leqq (1-t)^2$

であるから，求める体積は，

$$\pi\int_0^1 (1-t)^2\,dt-\pi\int_0^{\frac{1}{3}} (5t^2-4t+1)^2\,dt-\pi\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(1-t)^2}{2}\,dt$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_0^1-\pi\left[\frac{5}{3}t^3-2t^2+t\right]_0^{\frac{1}{3}}-\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_{\frac{1}{3}}^1$$

$$=\frac{\pi}{3}-\pi\left(\frac{5}{81}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{81}\pi$$

$$=\frac{\pi}{9}$$

別解　図形的に解答すると，次のようになる．

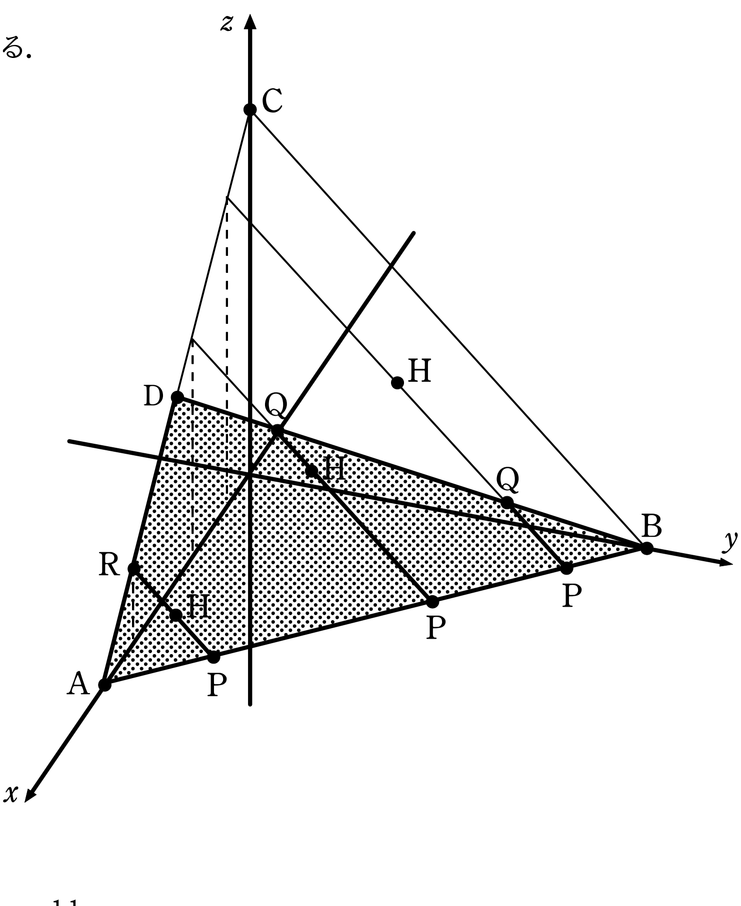
D は線分 AC の中点であるから，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ である．

平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と線分 AB との交点を P，
線分 BD との交点を Q，線分 AC との交点を R
とすると，三角形 ABD の周上および内部の
平面$z=t$ による断面は，D の x 座標が $\dfrac{1}{2}$ である
ことから，

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき線分 PQ，

$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき線分 PR

である．
これらの線分と $\mathrm{O}'(t,\ 0,\ 0)$ との距離を l とし，
l のとりうる範囲を考える．



BP：PA$=t：1-t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1-t)(0,\ 1,\ 0)+t(1,\ 0,\ 0)=(t,\ 1-t,\ 0),$$

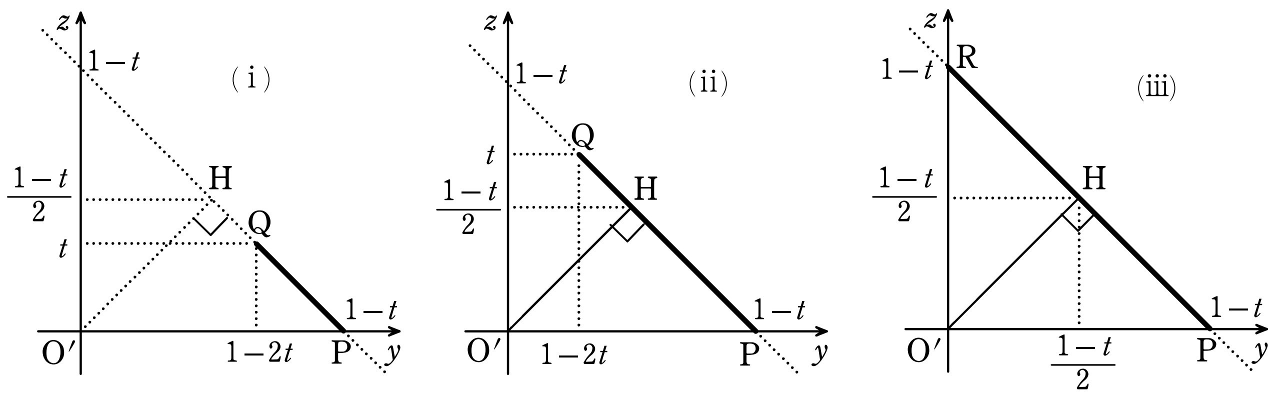
BQ：QD$=t:\dfrac{1}{2}-t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{t+\left(\frac{1}{2}-t\right)}=(1-2t)(0,\ 1,\ 0)+2t\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)=(t,\ 1-2t,\ t)$$

CR：RA$=t:1-t$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(1,\ 0,\ 0)=(t,\ 0,\ 1-t)$$

また，O$'$から線分PRへ垂線O$'$Hを下ろすと，三角形O$'$PRが直角二等辺三角形であることから，Hは線分PRの中点であり，その座標は$\mathrm{H}\left(t,\ \dfrac{1-t}{2},\ \dfrac{1-t}{2}\right)$である．この点が線分PQに含まれるのは，次の(ii)，(iii)の場合である．



(i) $t\leqq\dfrac{1-t}{2}$，すなわち$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{3}$のとき

lの最大値はO$'$P，lの最小値はO$'$Qであるから，　$\sqrt{t^2+(1-2t)^2}\leqq l\leqq 1-t$　　$\therefore$　$\sqrt{5t^2-4t+1}\leqq l\leqq 1-t$

(ii) $\dfrac{1-t}{2}\leqq t$，すなわち$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq 1$のとき

lの最大値はO$'$P，lの最小値はO$'$Hであるから，　$\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}\leqq l\leqq 1-t$

(iii) $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$のとき

lの最大値はO$'$P$=$O$'$R，lの最小値はO$'$Hであるから，　$\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}\leqq l\leqq 1-t$

(i)〜(iii)より，求める体積をVとすると，

$$V=\pi\int_0^1(1-t)^2\,dt-\pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{5t^2-4t+1}\right)^2dt-\pi\int_{\frac{1}{3}}^1\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)^2dt$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_0^1-\pi\left[\frac{5}{3}t^3-2t^2+t\right]_0^{\frac{1}{3}}-\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_{\frac{1}{3}}^1$$

$$=\frac{\pi}{3}-\pi\left(\frac{5}{81}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{81}\pi$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}}$$

第６問

(1)　$f(n)=n^3+10n^2+20n=n(n^2+10n+20)$

p，q，r，s を素数とすると，$f(n)$ が素数となるのは，次のいずれかが成り立つときである．

(ⅰ)　$\begin{cases} n=1 \\ n^2+10n+20=p \end{cases}$

(ⅱ)　$\begin{cases} n=-1 \\ n^2+10n+20=-q \end{cases}$

(ⅲ)　$\begin{cases} n=r \\ n^2+10n+20=1 \end{cases}$

(ⅳ)　$\begin{cases} n=-s \\ n^2+10n+20=-1 \end{cases}$

(ⅰ) について

$n=1$ より，$p=1^2+10\cdot1+20=31$

これは素数であるから適する．

(ⅱ) について

$n=-1$ より，$q=-(-1)^2-10\cdot(-1)-20=-12<0$

これは q が素数であることに反する．

(ⅲ) について

$n^2+10n+20=1$ より，　$n(n+1)=-19$

これを満たす整数 n は存在しない．

(ⅳ) について

$n^2+10n+20=-1$ より　$(n+3)(n+7)=0$　$\therefore$　$n=-3,\ -7$

このとき，　$s=3,\ 7$

これらは素数であるから成り立つ．

(ⅰ)～(ⅳ) より，求める整数 n は　$n=1,\ -3,\ -7$

(2)　$g(n)=n^3+an^2+bn=n(n^2+an+b)$

p，q，r，s を素数とすると，$g(n)$ が素数となるのは，

(ⅰ)　$\begin{cases} n=1 \\ n^2+an+b=p \end{cases}$

(ⅱ)　$\begin{cases} n=-1 \\ n^2+ab+b=-q \end{cases}$

(ⅲ)　$\begin{cases} n=r \\ n^2+an+b=1 \end{cases}$

(ⅳ)　$\begin{cases} n=-s \\ n^2+an+b=-1 \end{cases}$

(ⅲ)，(ⅳ) がともに成り立つとすると，　$\begin{cases} r^2+ar+b=1 & \cdots\cdots① \\ s^2-as+b=-1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①－② より，　$r^2-s^2+a(r+s)=2$　$\therefore$　$(r+s)(r-s-a)=2$

$r-s-a$ は整数であり，r，s が素数であることから，　$r+s\geqq4$

よって，これは矛盾する．

したがって，(iii)，(iv) がともに成り立つことはないから，(iii)，(iv) を満たす n は高々 2 個である．

(iii) のみが成り立ち，① を満たす異なる素数 r_1，r_2 が 存在すると仮定すると，解と係数の関係により，

$$r_1+r_2=-a,\quad r_1r_2=b-1$$

このとき，(ii) について，

$$\begin{aligned} q&=a-b-1=-(r_1+r_2)-(r_1r_2+1)-1\\ &=-(r_1r_2+r_1+r_2+1)-1\\ &=-(r_1+1)(r_2+1)-1<0 \end{aligned}$$

となり，q は素数とならないから，(ii) を満たす整数 n は存在しない．

また，(iv) のみが成り立ち，② を満たす異なる素数 s_1，s_2 が存在すると仮定すると，解と係数の関係より，

$$s_1+s_2=a,\quad s_1s_2=b+1$$

このとき，(ii) について，

$$\begin{aligned} q&=a-b-1=(s_1+s_2)-(s_1s_2-1)-1\\ &=-(s_1s_2-s_1-s_2+1)+1\\ &=-(s_1-1)(s_2-1)+1<0 \end{aligned}$$

となり，q は素数とならないから，(ii) を満たす整数 n は存在しない．

以上より，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数は 3 個以下である．　（証明終）