解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　日本医科大学後期

【　講　評　】

例年通り，大問4題で出題された．出題形式にも変化はなかった．ただ，昨年の後期試験と比較すると，難易度は高くなり，算量も多くなったため，得点しづらい試験であっただろう．なんとか得点をかき集め，5割を超えたい．以下，大問ごとに述べる．

［Ⅰ］確率【標準】

2つのさいころの目の結果に応じて，袋の中の玉を移動させる問題であった．基本的には数え上げていくだけであるが，やや複雑な条件であったため，ある程度の時間が必要な問題である．第1問であったことと，昨年は確率の難易度が低かったことから，ここで苦戦し，ペースを乱されてしまった人が多いのではないだろうか．

［Ⅱ］複素数平面【やや難】

前半は複素数平面上の軌跡で，問1は一次分数変換，問2は直線の方程式を導く問題で，いずれも典型的なものであるため落とせない．問3は3点が同一直線上にあることから，式の意味を考えて偏角を答えるだけである．問4は問3の条件を満たすzを求めることになるが，方針の選択が難しく計算量が多いため，解きづらい問題であった．問3までを確実に得点できるとよいだろう．

［Ⅲ］極限(無限等比級数)／極限(三角関数の極限)【標準】

前半は図形に関する無限等比級数の典型問題である．初項，公比を把握して和を求めるだけであるが，文字が多く，やや解きづらく感じた人は多いだろう．日本医科大ではたびたび出題されている形式であるため，対策ができていたかどうかがここで発揮される．差がつきそうな問題である．後半は正の極限値が存在する必要十分条件を求めることになるが，収束が確定する部分を作り出し，残った部分が収束する条件を考えることになる．極限計算に慣れていれば，答えはわかるかもしれないが，記述問題であるため，しっかりと必要十分条件が示せたかが鍵となる．ここは満点はとれなくてもよいだろう．

［Ⅳ］微分法(不等式への応用)／積分法(定積分，区分求積法)【やや難】

問1は定石通り，数学的帰納法と微分法で示すことになる．問2(1)は定積分計算，極限計算を行うだけである．問2(2)は誘導にしたがって漸化式を導くことになるが，文字が多くやや計算が煩雑であることと，問1の不等式を用いてはさみうちの原理を用いる部分がやや難しい．(3)は(2)までができていれば問題ないだろう．問3は対数を用いて区分求積法に持ち込む典型問題であるが，ここよりも手前の設問で諦めてしまった人が多いのではないだろうか．記述問題もあるので，完答できる必要はないだろう．

【 解 答 】

［Ⅰ］

問1　ア：5,　イ：36,

問2　ウ：1,　エ：6,

問3　オ：7,　カ：27,

問4　キ：9,　ク：10

［Ⅱ］

問1　ア：-1,　イ：2,　ウ：2

問2　エ：$-\dfrac{1}{2}$,　オ：$-\dfrac{1}{2}$,　カ：$-\dfrac{1}{2}$,　キ：$\dfrac{1}{2}$,　ク：-1,　ケ：1,　コ：2

問3　サ：0,　シ：π

問4　ス：4,　セ：$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$,　ソ：$\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

［Ⅲ］

問1　$A_p(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{1}{p}}}$

問2　$B_q(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos^{2q}\theta)^{\frac{1}{q}}}$

問3　$C(\theta)=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{2(1-\cos^4\theta)}$

問4　必要十分条件は $p=2$ (解説参照)，極限値 4

［Ⅳ］

問1　解説参照

問2　(1)　$I_0(m)=\dfrac{1}{m}$

(2)　$I_{n+1}(m)=(n+1)I_n(m)$　(解説参照)

(3)　$I_n(m)=\dfrac{n\,!}{m}$　(解説参照)

問3　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L_m=\frac{m^m}{e^{m-1}}$

【　解　説　】

［Ⅰ］

問1

$N_{\mathrm{A}}=4$ となるのは，次のいずれかである．

（ｉ）（操作1）で袋Aに4個の玉が入り，（操作3）で袋Aから玉を取り出さないとき

これが起こるのは，$a=4$ かつ ab が6の倍数でないときであるから，

$$(a,\ b)=(4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5)$$

のときである．

よって，この確率は　$\dfrac{4}{6^2}=\dfrac{4}{36}$

（ii）（操作1）で袋Aに5個の玉が入り，（操作3）で袋Aから玉を取り出すとき

これが起こるのは，$a=5$ かつ ab が6の倍数のときであるから，

$$(a,\ b)=(5,\ 6)$$

のときである．

よって，この確率は　$\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$

したがって，求める確率は，

$$\frac{4}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}_{\text{（アイ）}}$$

問2

$N_{\mathrm{B}}=4$ となるのは，次のいずれかである．

（ｉ）（操作2）で袋Bに4個の玉が入り，（操作3）で袋Bに玉を入れないとき

これが起こるのは，$\min\{b,\ 6-a\}=4$ かつ ab が6の倍数でないときである．

$\min\{b,\ 6-a\}=4$ となるのは，

$$(b,\ 6-a)=(4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4)$$

$$\therefore\quad (a,\ b)=(2,\ 4),\ (1,\ 4),\ (2,\ 5)$$

のときであり，これらはすべて「ab が6の倍数でない」という条件を満たす．

よって，この確率は　$\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{3}{36}$

（ii）（操作2）で袋Bに3個の玉が入り，（操作3）で袋Bに玉を入れるとき

これが起こるのは，$\min\{b,\ 6-a\}=3$ かつ ab が6の倍数のときである．

$\min\{b,\ 6-a\}=3$ となるのは，

$$(b,\ 6-a)=(3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3),\ (6,\ 3)$$

$$\therefore\quad (a,\ b)=(3,\ 3),\ (2,\ 3),\ (1,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6)$$

のときであり，この中で「ab が6の倍数」という条件を満たすのは，

$$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6)$$

よって，この確率は　$\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{3}{36}$

したがって，求める確率は，

$$\frac{3}{36}+\frac{3}{36}=\frac{1}{6}_{\text{（ウエ）}}$$

問 3

$N_{\mathrm{A}} \geqq 4$ かつ $N_{\mathrm{A,R}}=2$ となるのは，次のいずれかである．

(ｉ) (操作 1) で袋 A に 2 個の赤玉と 2 個の白玉が入り，(操作 3) で袋 A から玉を取り出さないとき

これが起こるのは，$a=4$ かつ ab が 6 の倍数でない，つまり

$$a=4 \text{ かつ } b=1,\ 2,\ 4,\ 5$$

であり，さらに (操作 1) で袋 O から 2 個の赤玉と 2 個の白玉を取り出すときである．

この確率は，

$$\frac{4}{6^2}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_4}=\frac{4}{36}\cdot\frac{6}{15}=\frac{2}{45}$$

(ⅱ) (操作 1) で袋 A に 2 個の赤玉と 3 個の白玉が入り，(操作 3) で袋 A から玉を取り出さないとき

これが起こるのは，$a=5$ かつ ab が 6 の倍数でない，つまり

$$a=5 \text{ かつ } b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

であり，さらに (操作 1) で袋 O から 2 個の赤玉と 3 個の白玉を取り出すときである．

この確率は，

$$\frac{5}{6^2}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_5}=\frac{5}{36}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{54}$$

(ⅲ) (操作 1) で袋 A に 2 個の赤玉と 3 個の白玉が入り，(操作 3) で袋 A から白玉を取り出すとき

これが起こるのは，$a=5$ かつ ab が 6 の倍数，つまり

$$a=5 \text{ かつ } b=6$$

であり，さらに (操作 1) で袋 O から 2 個の赤玉と 3 個の白玉を取り出し，(操作 3) で袋 A から白玉を取り出すときである．

この確率は，

$$\frac{1}{6^2}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_4}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1}=\frac{1}{36}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{90}$$

(ⅳ) (操作 1) で袋 A に 2 個の赤玉と 4 個の白玉が入り，(操作 3) で袋 A から白玉を取り出すとき

これが起こるのは，$a=6$ かつ ab が 6 の倍数，つまり

$$a=6 \text{ かつ } b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

であり，さらに (操作 1) で袋 O から 2 個の赤玉と 4 個の白玉を取り出し，(操作 3) で袋 A から白玉を取り出すときである．

この確率は，

$$\frac{6}{6^2}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_4}{{}_6\mathrm{C}_6}\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_1}=\frac{6}{36}\cdot 1\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{9}$$

したがって，求める確率は，

$$\frac{2}{45}+\frac{5}{54}+\frac{1}{90}+\frac{1}{9}=\frac{7}{27}_{\text{(オカ)}}$$

問 4

赤玉は2個しかないから，「$N_{\mathrm{A}}=4$ かつ $N_{\mathrm{A,R}}=1$ という条件の下で，$N_{\mathrm{B,R}}=1$ となる」ことの余事象は，

「$N_{\mathrm{A}}=4$ かつ $N_{\mathrm{A,R}}=1$ という条件の下で，$N_{\mathrm{B,R}}=0$ となる」

ことである．

$N_{\mathrm{A}}=4$ となるのは，問1より

$(a,\ b)=(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 6)$

の5通りであるが，この中で $N_{\mathrm{A}}=4$ かつ $N_{\mathrm{A,R}}=1$ かつ $N_{\mathrm{B,R}}=0$ となるのは，

「$(a,\ b)=(4,\ 1)$ かつ（操作2）で袋Bに1個の白玉が入る」

ときであるから，この確率は，

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

したがって，求める確率は，

$$1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}\ \text{(キク)}$$

[Ⅱ]

問 1

P(z) は O を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円 C_1 上を動くから，$|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……① が成り立つ.

$w=\dfrac{z+i}{z+1}$ より，　$w(z+1)=z+i$　　$\therefore$　$(w-1)z=-w+i$

これは $w=1$ のとき成り立たないから $w\neq 1$ であり，このとき

$$z=\frac{-w+i}{w-1}$$

これを ① に代入すると，

$$\left|\frac{-w+i}{w-1}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2} \iff 2|w-i|=\sqrt{2}|w-1| \quad \cdots\cdots②$$

両辺を 2 乗すると，

$$4(w-i)(\overline{w}+i)=2(w-1)(\overline{w}-1)$$

$$4(w\overline{w}+iw-i\overline{w}+1)=2(w\overline{w}-w-\overline{w}+1)$$

$$2w\overline{w}+(2+4i)w+(2-4i)\overline{w}=-2$$

$$w\overline{w}+(\overline{1-2i})w+(1-2i)\overline{w}=-1$$

$$\{w+(1-2i)\}\{\overline{w+(1-2i)}\}-5=-1 \qquad \therefore\ |w+(1-2i)|^2=4$$

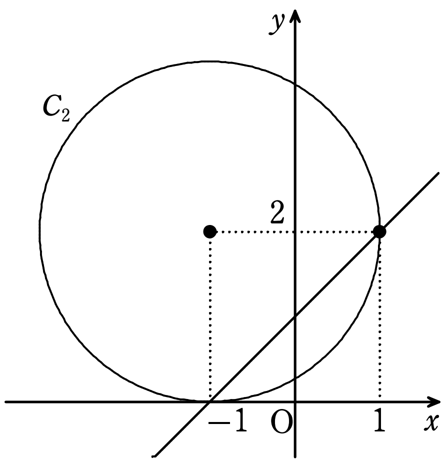
$|w+(1-2i)|\geqq 0$ であるから，　$|w-(-1+2i)|=2$

したがって，点 Q(w) の軌跡は中心 $\boldsymbol{-1+2i}$，半径 **2** の円 C_2 である.

問 2

$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ のとき，

$$w=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+i}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+1}=\frac{-1+3i}{1+i}=\frac{(-1+3i)(1-i)}{2}=1+2i$$



x，y を実数として，$u=x+yi$ とおくと，直線 PQ の方程式は

$$y=\frac{2-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}(x-1)+2 \qquad \therefore\ x-y+1=0$$

$x=\mathrm{Re}(u)=\dfrac{1}{2}(u+\overline{u})$，　$y=\mathrm{Im}(u)=\dfrac{1}{2i}(u-\overline{u})$ を代入すると，

$$\frac{1}{2}(u+\overline{u})-\frac{1}{2i}(u-\overline{u})+1=0$$

$$-\frac{1}{2}(u+\overline{u})-\frac{i}{2}(u-\overline{u})=1 \qquad \therefore\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)u+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\overline{u}=1$$

この直線 L は -1，$1+2i$ を通り，これらはともに円 C_2 上の点である．円と直線の交点は高々 2 つであるから，直線 L と円 C_2 の 2 つの交点 A(α)，B(β) について，

$$\alpha=-1,\quad \beta=1+2i$$

問 3

直線 L が $\mathrm{A}(\alpha)$ を通るとき，3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ は同一直線上にあるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=z-\alpha$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=z-w$ のなす角は 0 または π，すなわち

$$\arg\left(\frac{z-\alpha}{z-w}\right)=0 \text{ または } \pi$$

である．

問 4

点 $\mathrm{P}(z)$ が C_1 上を動くとき $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，$z=a+bi$ とおくと，

$$a^2+b^2=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots③$$

また，$\mathrm{Q}(w)$ について $w=\dfrac{z+i}{z+1}$ であるから，

$$\frac{z-\alpha}{z-w}=\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{z+i}{z+1}}=\frac{(z-\alpha)(z+1)}{z^2-i}$$

問 2 より，2 点 $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(z)$ を通る直線 L が $\mathrm{A}(\alpha)$ を通るとき，

$$\begin{cases}\alpha=-1\\ \arg\left(\dfrac{z-\alpha}{z-w}\right)=0 \text{ または } \pi\end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{z-w}=\frac{(z+1)^2}{z^2-i} \text{ が実数}$$

であるから，以下これについて考える．

$$\frac{(z+1)^2}{z^2-i}=\frac{\{(a+bi)+1\}^2}{(a+bi)^2-i}=\frac{(a+1)^2-b^2+2(a+1)bi}{(a^2-b^2)+(2ab-1)i}$$

これの分母を実数化したときの分子の虚部が 0 となるから，

$$-\{(a+1)^2-b^2\}(2ab-1)+2(a+1)b(a^2-b^2)=0$$

③ より $b^2=\dfrac{1}{2}-a^2$ であるから，

$$-\left\{(a+1)^2-\left(\frac{1}{2}-a^2\right)\right\}(2ab-1)+2(a+1)b\left\{a^2-\left(\frac{1}{2}-a^2\right)\right\}=0$$

$$(4a^2+4a+1)(2ab-1)-2(a+1)b(4a^2-1)=0$$

$$(2a+1)\{(2a+1)(2ab-1)-2(a+1)b(2a-1)\}=0$$

$$(2a+1)(-2a+2b-1)=0$$

$$\therefore \quad a=-\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad b=a+\frac{1}{2}$$

$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき，③ に代入すると，　$b^2=\dfrac{1}{4}$　$\therefore$　$b=\pm\dfrac{1}{2}$

よって，　$z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$

$b=a+\dfrac{1}{2}$ のとき，③ に代入すると，　$a^2+\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

$$8a^2+4a-1=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$$

このとき，　$b=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{4}$

よって，　$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}+(1\pm\sqrt{3}\,i)}{4}$　(複号同順)

したがって，2つの条件を満たす $\mathrm{P}(z)$ は全部で4個あり，これらの中で実部の値が最も大きい複素数は，

$$z=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}i$$

別解　問1の②以降は次のように解くこともできる．

（その１）

$2|w-i|=\sqrt{2}|w-1|$　……②

$\mathrm{M}(i)$，$\mathrm{N}(1)$ とすると，②式より　$\mathrm{MQ}:\mathrm{NQ}=\sqrt{2}:2=1:\sqrt{2}$

よって，点Qは2点M，Nを

$1:\sqrt{2}$ に内分する点　$\dfrac{\sqrt{2}\cdot i+1\cdot 1}{1+\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1+(2-\sqrt{2})i$，

$1+\sqrt{2}$ に外分する点　$\dfrac{\sqrt{2}\cdot i-1\cdot 1}{-1+\sqrt{2}}=(-1+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{2}+1)=-(\sqrt{2}+1)+(2+\sqrt{2})i$

を直径の両端とする円である．したがって，点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は円で，

中心　$\dfrac{\sqrt{2}-1+(2-\sqrt{2})i-(\sqrt{2}+1)+(2+\sqrt{2}\,i)}{2}=-1+2i$，

半径　$\dfrac{1}{2}|\sqrt{2}-1+(2-\sqrt{2})i-\{-(\sqrt{2}+1)+(2+\sqrt{2})i\}|=\sqrt{2}|1-i|=2$

となる．

（その２）

②において $w=x+yi$ とおくと，

$2|(x+yi)-i|=\sqrt{2}|(x+yi)-1|$

$\sqrt{2}|x+(y-1)i|=|(x-1)+yi|$

両辺を2上すると，

$2\{x^2+(y-1)^2\}=(x-1)^2+y^2$

$x^2+2x+y^2-4y=-1$

$\therefore\ (x+1)^2+(y-2)^2=4$

よって，点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡は中心 $-1+2i$，半径2の円である．

補足

問4は①より

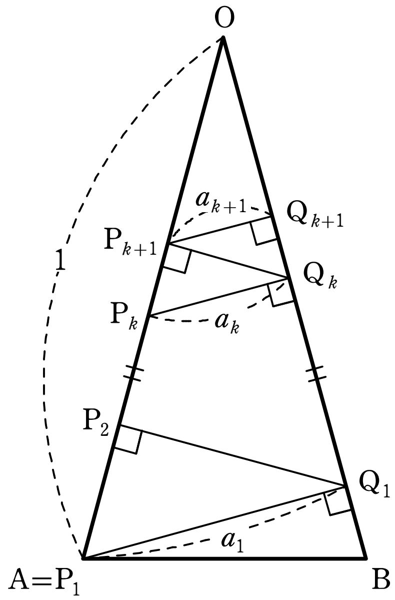
$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおいて解くこともできるが，計算がやや煩雑になる．状況に応じて，処理を使い分けたい．

[Ⅲ]

$P_kQ_k=a_k$ とする．直角三角形 OP_1Q_1 に注目して,

$$a_1=\sin\theta,\quad S_1=\frac{1}{2}\cdot a_1\cdot OQ_1=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \quad\cdots\cdots①$$



また，直角三角形 $P_{k+1}Q_kQ_{k+1}$ と $Q_kP_kP_{k+1}$ に注目して,

$$a_{k+1}=Q_kP_{k+1}\cdot\cos\theta=a_k\cos\theta\cdot\cos\theta \quad\cdots\cdots②$$
$$=(\cos\theta)^2a_k \quad\cdots\cdots③$$

直角三角形 OP_kQ_k と $OP_{k+1}Q_{k+1}$ の相似比は

$$a_k:a_{k+1}=1:(\cos\theta)^2$$

であるから,

$$S_{k+1}=(\cos\theta)^4S_k \quad\cdots\cdots④$$

問 1

② より,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(P_kQ_k)^p+(Q_kP_{k+1})^p\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(a_k)^p+(a_k\cos\theta)^p\right\}$$
$$=(1+\cos^p\theta)\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)^p \quad\cdots\cdots⑤$$

③より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)^p$ は公比 $\left\{(\cos\theta)^2\right\}^p=\cos^{2p}\theta$ の無限等比級数であり，$0<\cos^{2p}\theta<1$ であるから収束する.

①より，その和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)^p=\frac{(a_1)^p}{1-\cos^{2p}\theta}=\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^{2p}\theta}$

これと ⑤ から,

$$A_p(\theta)=\left\{(1+\cos^p\theta)\cdot\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^{2p}\theta}\right\}^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^p\theta}\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{1}{p}}}$$

問 2

③より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(P_kQ_k)^q=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)^q$ は公比 $\left\{(\cos\theta)^2\right\}^q=\cos^{2q}\theta$ の無限等比級数であり，$0<\cos^{2q}\theta<1$ であるから

収束する．① より，その和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)^q=\frac{(a_1)^q}{1-\cos^{2q}\theta}=\frac{\sin^q\theta}{1-\cos^{2q}\theta}$

よって，$\displaystyle B_q(\theta)=\left(\frac{\sin^q\theta}{1-\cos^{2q}\theta}\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{\sin\theta}{(1-\cos^{2q}\theta)^{\frac{1}{q}}}$

問 3

④より，$C(\theta)$ は公比 $(\cos\theta)^4=\cos^4\theta$ の無限等比級数であり，$0<\cos^4\theta<1$ であるから収束する．①より,
その和は,

$$C(\theta)=\frac{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^4\theta}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1-\cos^4\theta)}$$

問 4

問 1 ～ 3 の結果から,

$$\frac{A_p(\theta)\cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}=\frac{\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{1}{p}}}\cdot\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{2}{p}}}}{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{2(1-\cos^4\theta)}}=\frac{2\sin\theta(1-\cos^4\theta)}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{3}{p}}}$$

$$=\frac{2\sin\theta(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{3}{p}}}=\frac{2(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin^3\theta}{(1-\cos^p\theta)^{\frac{3}{p}}}$$

$$=\frac{2(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta}\cdot\left(\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^p\theta}\right)^{\frac{3}{p}}$$

ここで,

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{2(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta}=\frac{2(1+1^2)}{1}=4$$

であるから, $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^p\theta}$ が正の値に収束する必要十分条件を考える.

$\theta\to+0$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから, $0<\sin\theta<1$, $0<\cos\theta<1$

(Ⅰ) $0<p<2$ のとき

$\cos^p\theta>\cos^2\theta$ より,

$$\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^p\theta}>\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin^p\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^{2-p}\theta}$$

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{\sin^{2-p}\theta}=\infty$ であるから, 追い出しの原理により, $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^p\theta}=\infty$

(Ⅱ) $p=2$ のとき

このとき,

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^p\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}=\lim_{\theta\to+0}1=1$$

となり, 正の値に収束する.

(Ⅲ) $p>2$ のとき

$\cos^p\theta<\cos^2\theta$ より,

$$0<\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^p\theta}<\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin^p\theta}{\sin^2\theta}=\sin^{p-2}\theta$$

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\sin^{p-2}\theta=0$ であるから, はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^p\theta}{1-\cos^p\theta}=0$

以上(Ⅰ)～(Ⅲ)より, 求める p に対する必要十分条件は $\boldsymbol{p=2}$ であり, そのときの極限値は,

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{A_p(\theta)\cdot B_{\frac{p}{2}}(\theta)}{C(\theta)}=4\cdot1=\mathbf{4}$$

［Ⅳ］

問１　$e^x > \dfrac{x^N}{N!} \iff e^x - \dfrac{x^N}{N!} > 0$

$f_N(x) = e^x - \dfrac{x^N}{N!}$ とおき，0 以上の全ての整数 N に対して，

$$f_N(x) > 0 \quad \cdots ①$$

が成り立つことを，数学的帰納法で示す.

$N=0$ のとき

$$f_0(x) = e^x - \frac{x^0}{0!} = e^x - 1 > 0 \quad (\because\ x>0)$$

よって，① は成り立つ.

$N=k$ (k は 0 以上の整数) のとき，① が成り立つと仮定すると，

$$f_k(x) = e^x - \frac{x^k}{k!} > 0 \quad \cdots\cdots ②$$

このとき，$f_{k+1}(x) = e^x - \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ について，② より

$$f'_k(x) = e^x - \frac{x^k}{k!} > 0$$

よって，$x>0$ において $f_{k+1}(x)$ は単調に増加し，

$$f_{k+1}(0) = e^0 - \frac{0^{k+1}}{(k+1)!} = 1 > 0$$

したがって，$f_{k+1}(x) > 0$ が成り立つ.

以上により，0 以上の全ての自然数 N について，

$$f_N(x) > 0 \iff e^x > \frac{x^N}{N!}$$

が成り立つ.　(証明終)

問 2

(1)
$$\begin{aligned}
I_0(m) &= \lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M x^{m-1}\cdot e^{-x^m}\,dx\right) = \lim_{M\to\infty}\left\{-\frac{1}{m}\int_0^M (-x^m)'\cdot e^{-x^m}\,dx\right\} \\
&= \lim_{M\to\infty}\left(\left[-\frac{1}{m}e^{-x^m}\right]_0^M\right) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{m}(1-e^{-M^m}) \\
&= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{e^{M^m}}\right) = \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\int_0^M x^{m(n+1)+m-1}\cdot e^{-x^m}\,dx &= -\frac{1}{m}\int_0^M x^{m(n+1)}\cdot(-x^m)'\cdot e^{-x^m}\,dx \\
&= -\frac{1}{m}\left\{\left[x^{m(n+1)}\cdot e^{-x^m}\right]_0^M - \int_0^M m(n+1)x^{m(n+1)-1}\cdot e^{-x^m}\,dx\right\} \\
&= -\frac{1}{m}M^{m(n+1)}\cdot e^{-M^m} + (n+1)\int_0^M x^{mn+m-1}\cdot e^{-x^m}\,dx
\end{aligned}$$

よって，$I_{n+1}(m) = \displaystyle\lim_{M\to\infty}\left\{-\frac{M^{m(n+1)}}{me^{M^m}} + (n+1)\int_0^M x^{mn+m-1}\cdot e^{-x^m}\,dx\right\}$

ここで，$M^m>0$ であるから，(1) の不等式で $x=M^m$ とすると，

$$e^{M^m}>\frac{M^{mN}}{N!}$$

が成り立つ．$N=n+2$ とすると，

$$e^{M^m}>\frac{M^{m(n+2)}}{(n+2)!}$$

$$\frac{(n+2)!}{M^m}>\frac{M^{m(n+1)}}{e^{M^m}}>0 \qquad \therefore \quad 0<\frac{M^{m(n+1)}}{me^{M^m}}<\frac{(n+2)!}{mM^m}$$

m，n は自然数であるから，$\displaystyle\lim_{M\to\infty}\frac{(n+2)!}{mM^m}=0$ であり，はさみうちの原理により，

$$\lim_{M\to\infty}\frac{M^{m(n+1)}}{me^{M^m}}=0$$

よって，$I_n(m)=\displaystyle\lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M x^{mn+m-1}e^{-x^m}\,dx\right)$ が存在すると仮定すると，

$$I_{n+1}(m)=\lim_{M\to\infty}\left\{-\frac{M^{m(n+1)}}{me^{M^m}}+(n+1)\int_0^M x^{mn+m-1}\cdot e^{-x^m}\,dx\right\}=0+(n+1)I_n(m)$$

$$\therefore \quad I_{n+1}(m)=(n+1)I_n(m)$$

したがって，$I_{n+1}(m)$ は存在する．（証明終）

(3)　(1) より $I_0(m)=\dfrac{1}{m}$ が存在し，(2) より $I_n(m)$ が存在すると仮定すると，

$$I_{n+1}(m)=(n+1)I_n(m) \quad \cdots\cdots①$$

が成り立ち，$I_{n+1}(m)$ が存在するから，帰納的にすべての自然数 n について $I_n(m)$ は存在する．（証明終）

また，① を繰り返し用いると，

$$\begin{aligned}I_n(m)&=nI_{n-1}(m)=n\cdot(n-1)I_{n-2}(m)=\cdots\cdots\\&=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdots\cdot2\cdot1\cdot I_0(m)\\&=n!\cdot\frac{1}{m}=\boldsymbol{\frac{n!}{m}}\end{aligned}$$

問 3

$m\geqq2$ のとき，$x_n=\dfrac{1}{n^{m-1}}\left\{\dfrac{I_{mn}(m)}{I_n(m)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ とすると，問 2 の (3) より，

$$x_n=\frac{1}{n^{m-1}}\left\{\frac{\dfrac{(mn)!}{m}}{\dfrac{n!}{m}}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{\frac{(mn)!}{n^{n(m-1)}\cdot n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left(\frac{mn}{n}\cdot\frac{mn-1}{n}\cdot\frac{mn-2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

m，n は自然数であるから，$x_m>0$ であり，両辺の自然対数をとると

$$\begin{aligned}\log x_n &= \frac{1}{n}\log\left(\frac{mn}{n}\cdot\frac{mn-1}{n}\cdot\frac{mn-2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left\{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)+\log\left(\frac{n+2}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(\frac{mn-1}{n}\right)+\log\left(\frac{mn}{n}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{mn}\log\frac{k}{n}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log x_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{mn}\log\frac{k}{n} = \int_1^m \log x\,dx\\ &= \Big[x\log x - x\Big]_1^m = m\log m - m + 1\\ &= \log m^m - \log e^{m-1}\\ &= \log\frac{m^m}{e^{m-1}}\end{aligned}$$

$x>0$ において $y=\log x$ は連続であるから，

$$L_m = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{m^m}{e^{m-1}}$$