解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2024年度　昭和大学Ⅱ期

【　講　評　】

例年通り，大問4題で出題された．昨年は1題であった小問集合が今年は2題であった．難易度に大きな変化はなかったので，全体で70％以上の得点ができればよいだろう．以下，大問ごとに特徴を述べる．

1　小問集合（複素数平面／二項定理）【やや易】

(1)～(3)は複素数平面の典型的な計算問題と軌跡の問題であった．確実に得点したい問題であるが，複素数平面を苦手とする受験生は多いので，差がつく問題であったのではないだろうか．(4)は数列が二項係数を並べたものであることに気づけたかがどうかがポイントで，数値からパスカルの三角形がイメージできた人は解けたであろう．

2　小問集合（対数関数／数と式／式と証明／２次関数／領域）【標準】

(1)の対数不等式は，やや計算が煩雑であった．(2)のガウス記号の処理は，類題を解いた経験で出来が大きく分かれそうである．(3)は相加・相乗を用いるだけであるから落とせない．(4)は実数x，yの存在条件を調べ忘れて正確に解けなかった人が多いのではないだろうか．(5)はグラフや領域の対称性を調べる意識があれば容易である．

3　数Ⅱ微分法／数Ⅱ積分法【標準】

(1)～(3)は4次関数のグラフと接線，面積に関する典型問題である．工夫をしないとやや計算が面倒であるが，一度は解いたことがある問題であろう．ここは確実に得点したい．(4)は4次関数の3つの極値をとる点を通る放物線を求める問題で，計算に工夫が必要でやや解きづらかった．

4　確率【易】

典型的な条件付き確率の問題であった．難易度も低いので，ここは落とせないだろう．

【　解　答　】

1　(1)　2,　(2)　実軸の原点を除く部分，または点0を中心とする半径1の円周上,　(3)　$2\sqrt{2}-2$

(4)(4−1)　2^{n-1},　(4−2)　2^n-1

2　(1)　$-3<x\leqq\dfrac{-5-2\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{-5+2\sqrt{3}}{3}\leqq x<\dfrac{1}{3}$,　(2)　$\dfrac{2}{3}\leqq x<\dfrac{4}{3}$,　(3)　$\dfrac{9}{2}$,

(4)　最大値$\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$，最小値$-\dfrac{17}{8}$,　(5)　解説参照

3　(1)　$y=4x-2$,　(2)　$y=4x+2$,　(3)　$\dfrac{64\sqrt{2}}{15}$,　(4)　$\dfrac{128}{15}$,　(5)　$y=-2x^2+3x+2$

4　(1)　$\dfrac{7}{1000}$,　(2)　$\dfrac{53}{500}$,　(3)　$\dfrac{7}{100}$,　(4)　$\dfrac{297}{298}$,　(5)　$\dfrac{49}{148}$

【　解　説　】

1

(1)　$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗して，　$z^2+\dfrac{1}{z^2}+2=2 \iff z^4=-1$

よって，　$z^{2024}=(z^4)^{506}=(-1)^{506}=1$　であるから，　$z^{2024}+\dfrac{1}{z^{2024}}=\mathbf{2}$

(2)　$z\neq 0$　……①　であり，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数のとき，

$$\overline{z+\dfrac{1}{z}}=z+\dfrac{1}{z} \iff \overline{z}^2z+z=z^2\overline{z}+\overline{z}$$

$$\iff z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$$

$$\iff (z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0 \qquad \therefore\ z=\overline{z}\ \text{または}\ z\overline{z}-1=0$$

(Ⅰ)　$z-\overline{z}=0$ のとき

　$\overline{z}=z$ より，z は実数であるから，① に注意すると，点 z は実軸の原点を除く部分を描く．

(Ⅱ)　$z\overline{z}-1=0$ のとき

$$z\overline{z}=1 \iff |z|^2=1 \qquad \therefore\ |z|=1$$

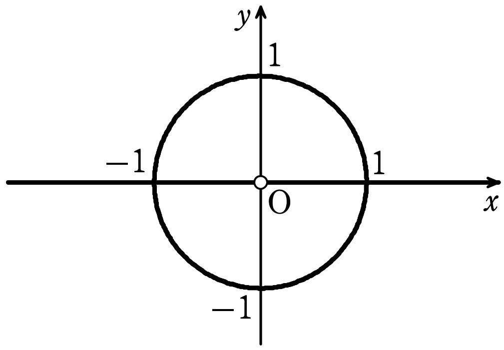
　よって，点 z は点 0 を中心とする半径 1 の円周上を動く．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，複素数平面上で点 z の全体は，

実軸の原点を除く部分，または

点 0 を中心とする半径 1 の円周上

を描く．



(3)　$|z-w|$ は 2 点 z と w の複素数平面上における距離を表す．

また，

$$|w+2-2i|=1 \iff |w-(-2+2i)|=1$$

であるから，点 w は点 $-2+2i$ を中心とする半径 1 の円を描く．

$\mathrm{A}(-2+2i)$ とする．

z が実軸の原点を除く部分を動くとき，$|z-w|$ が最小となるのは，A から実軸へ下ろした垂線の上に A，$\mathrm{Q}(w)$，$\mathrm{P}(z)$ の順で並ぶときであるから，その最小値は

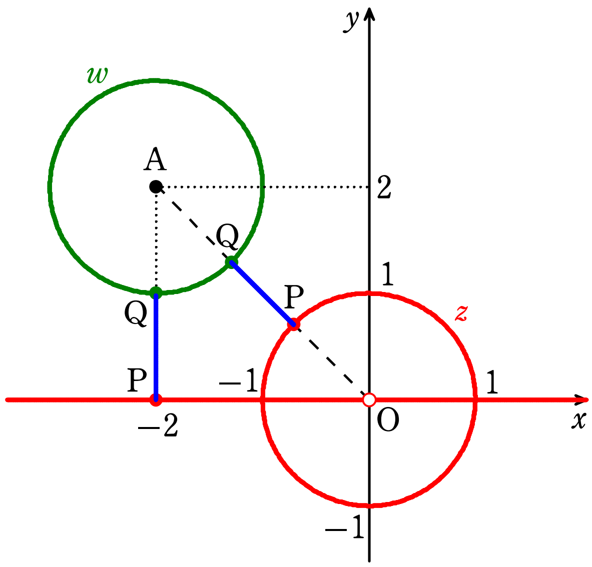
$$|z-w|=1$$

z が点 0 を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$|z-w|$ が最小となるのは O，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$，A がこの順で一直線上に並ぶときであるから，その最小値は

$$|z-w|=\mathrm{OA}-\mathrm{OP}-\mathrm{AQ}=2\sqrt{2}-1-1=2\sqrt{2}-2$$

$1>2\sqrt{2}-2$ であるから，$|z-w|$ の最小値は

$\mathbf{2\sqrt{2}-2}$



$\boxed{\text{別解}}$ (1) は素直に z を求めて計算してもよい.

$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ より,　$z^2-\sqrt{2}\,z+1=0$　$\therefore$　$z=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$ (複号同順)

よって,　$z^{2024}=\cos(\pm 506\pi)+i\sin(\pm 506\pi)=1$

したがって,　$z^{2024}+\dfrac{1}{z^{2024}}=1+\dfrac{1}{1}=\mathbf{2}$

$\boxed{\text{別解}}$ (2) の $\mathrm{P}(z)$ の軌跡は, 次のように求めてもよい.

$z\fallingdotseq 0$ より $z=a+bi$, $(a,\ b)\fallingdotseq(0,\ 0)$ とおけるから,

$$z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}=a\left(1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)+b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)i$$

これが実数となるとき,

$$b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)=0 \iff b=0 \quad \text{または} \quad a^2+b^2=1$$

$(a,\ b)\fallingdotseq(0,\ 0)$ であるから, z が表す複素数平面上の点全体は,

実軸の原点を除く部分　または　点 0 を中心とする半径 1 の円周上

である.

(4)　(4−1)　第 n 群に含まれる項の総和は, 二項定理を用いることで,

$${}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n}\mathrm{C}_k=(1+1)^{n-1}=\mathbf{2^{n-1}}$$

(4−2)　(4−1) から, 求める総和は,

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=\mathbf{2^n-1}$$

2

(1)　対数の真数は正であるから，　$\begin{cases} 1-3x>0 \\ x+3>0 \end{cases} \iff -3<x<\dfrac{1}{3}$　……①

この条件のもとで不等式を変形すると，

$$\log_2(1-3x)+\log_4(x+3)\leqq 2 \iff \log_2(1-3x)+\frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4}\leqq 2$$

$$\iff 2\log_2(1-3x)+\log_2(x+3)\leqq 4$$

$$\iff \log_2(1-3x)^2(x+3)\leqq \log_2 16 \qquad \therefore\ (1-3x)^2(x+3)\leqq 16$$

$x=1$ で等号が成立することに注意すると，

$$\{3(x-1)+2\}^2((x-1)+4)\leqq 16 \iff 9(x-1)^3+48(x-1)^2+52(x-1)+16\leqq 16$$

$$\iff (x-1)\{9(x-1)^2+48(x-1)+52\}\leqq 0$$

① より，$x-1<0$ であるから，　$9(x-1)^2+48(x-1)+52\geqq 0$

よって，　$x-1\leqq\dfrac{-24-\sqrt{24^2-9\cdot 52}}{9}$，$x-1\geqq\dfrac{-24+\sqrt{24^2-9\cdot 52}}{9}$

$$\iff x-1\leqq\frac{-8-\sqrt{8^2-52}}{3},\ x-1\geqq\frac{-8+\sqrt{8^2-52}}{3}$$

$$\therefore\ x\leqq\frac{-5-2\sqrt{3}}{3},\ x\geqq\frac{-5+2\sqrt{3}}{5}$$

① も合わせて，　$\boldsymbol{-3<x\leqq\dfrac{-5-2\sqrt{3}}{3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{-5+2\sqrt{3}}{3}\leqq x<\dfrac{1}{3}}$

(2)　整数 m と実数 a（$0\leqq a<1$）を用いて，

　$x=m+a$　……②

と表すと，

$$[3x]-[x]=[3m+3a]-[m]=3m+[3a]-m=2m+[3a]$$

$0\leqq 3a<3$ より，

(Ⅰ)　$0\leqq 3a<1$　$\therefore$　$0\leqq a<\dfrac{1}{3}$　……③　のとき

　$2m+[3a]=2m$ であり，これが 2 であるから，　$m=1$

　② と ③ より，　$1\leqq x<\dfrac{4}{3}$

(Ⅱ)　$1\leqq 3a<2$　$\therefore$　$\dfrac{1}{3}\leqq a<\dfrac{2}{3}$ のとき

　$2m+[3a]=2m+1$ であり，これが 2 となることはない．

(Ⅲ)　$2\leqq 3a<3$　$\therefore$　$\dfrac{2}{3}\leqq a<1$　……④　のとき

　$2m+[3a]=2m+2$ であり，これが 2 であるから，　$m=0$

　② と ④ より，　$\dfrac{2}{3}\leqq x<1$

以上(Ⅰ)～(Ⅲ)より，　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\leqq x<\dfrac{4}{3}}$

(3)　$x>0$ より $x^2>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式により，

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x+\frac{1}{2x}\right)=x^2+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$$

等号成立が成り立つのは，　$x^2=\dfrac{1}{x^2}$ かつ $x>0 \iff x=1$

よって，求める最小値は $x=1$ のとき，　$\dfrac{9}{2}$

(4)　$x+y=u$，$xy=v$ とおくと，

$$x^2+xy+y^2=1 \iff u^2-v=1 \iff v=u^2-1 \quad \cdots\cdots⑤$$

解と係数の関係により，x，y は2次方程式

$$t^2-(x+y)t+xy=0 \iff t^2-ut+v=0$$

の2解であるから，この方程式の判別式を D とすると，x，y が実数となるとき，

$$D=u^2-4v\geqq 0 \quad \cdots\cdots⑥$$

これに⑤を代入すると，

$$u^2-4(u^2-1)\geqq 0 \iff u^2\leqq\frac{4}{3} \quad \therefore\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq u\leqq\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots⑦$$

また，⑤より

$$x+2xy+y=u+2v=u+2(u^2-1)=2u^2+u-2=2\left(u+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$$

⑦における最大値と最小値を求めればよいから，

$u=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $2\cdot\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}-2=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$，

$u=-\dfrac{1}{4}$ のとき，最小値 $-\dfrac{17}{8}$

をとる．

別解　⑦まで導いた後は，次のように解くこともできる．

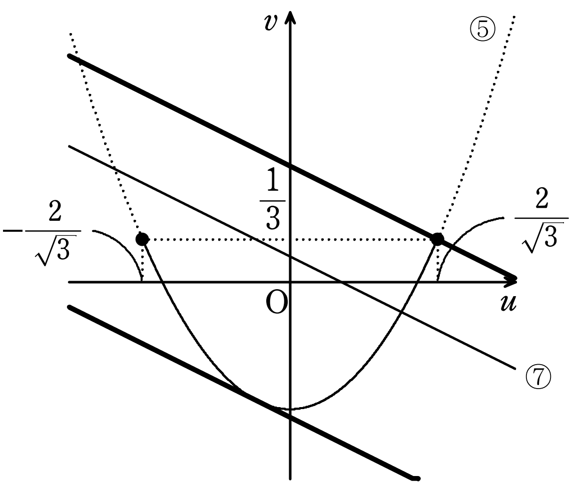
⑤より，

$$x+2xy+y=u+2v=k$$

$$\therefore\ v=-\frac{1}{2}u+\frac{k}{2} \quad \cdots\cdots⑧$$

とおくと，これは uv 平面上の直線を表す．

直線⑧が，uv 平面上の放物線⑤の⑦の部分と共有点をもつときの k の最大・最小値が求めるものである．



k が最大となるのは，直線⑧が $(u,\ v)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{3}\right)$ を通るときであるから，その最大値は，

$$k=\frac{2}{\sqrt{3}}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$$

また，k が最小となるのは，⑧ が ⑤ の ⑦ の部分と接するときであるから，⑤，⑧ を連立させて，

$$u^2-1=-\frac{1}{2}u+\frac{k}{2} \qquad \therefore \quad 2u^2+u-2-k=0$$

判別式を D とすると，

$$D=1-4\cdot 2(-2-k)=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{17}{8}$$

このとき，$u=-\dfrac{1}{4}$ であるから，⑦ を満たす.

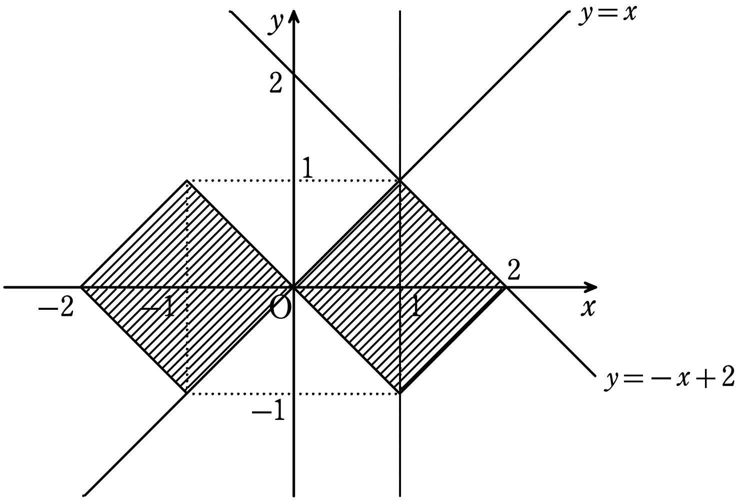
したがって，最小値は　$k=-\dfrac{17}{8}$

(5)　$(x,\ y)$ が不等式を満たすとき，$(-x,\ y)$，$(x,\ -y)$ も不等式をみたすから，不等式が表す領域は，x 軸，y 軸に関して対称である.

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，不等式は

$$|x-1|+y\leqq 1 \iff \begin{cases} y\leqq -x+1 & (1\leqq x) \\ y\leqq x & (0\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

よって，対称性を考慮すると，不等式が表す領域は下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む.



$\boxed{3}$

(1)　直線②の方程式を $y=mx+n$ とし，曲線①との異なる2接点の x 座標を a，b（$a<b$）とする.

①，②を連立すると，

$$x^4-4x^2+(4-m)x+2-n=0$$

この方程式が $x=a$，b を重解に持つので，恒等式

$$x^4-4x^2+(4-m)x+2-n=(x-a)^2(x-b)^2 \quad \cdots\cdots④$$

が成立し，④の右辺を展開すると，

$$(x^2-2ax+a^2)(x^2-2bx+b^2)=x^4-2(a+b)x^3+(a^2+4ab+b^2)x^2-2ab(a+b)x+a^2b^2$$

④の左辺と係数比較することで，
$$\begin{cases} a+b=0 & \cdots⑤ \\ a^2+4ab+b^2=-4 & \cdots⑥ \\ -2ab(a+b)=4-m & \cdots⑦ \\ 2-n=a^2b^2 & \cdots⑧ \end{cases}$$

⑤，⑥より，　$0^2+2ab=-4$　　$\therefore$　$ab=-2$　$\cdots\cdots⑨$

これと⑤を⑦に代入して，　$m=4$

また，⑧に代入して，　$n=2-(-2)^2=-2$

よって，求める直線②の方程式は，　$\boldsymbol{y=4x-2}$

また，⑤と⑨から，a，b は $u^2-2=0$ の2解であり，$a<b$ であるから，　$a=-\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$　$\cdots\cdots⑩$

(2)　$y=x^4-4x^2+4x+2$ について，　$y'=4x^3-8x+4$

直線③と曲線①の接点を $(t,\ t^4-4t^2+4+2)$ とおくと，直線③の方程式は，

$$y=(4t^3-8t+4)(x-t)+t^4-4t^2+4t+2 \qquad \therefore \quad y=(4t^3-8t+4)x-3t^4+4t^2+2$$

直線③が直線②と平行であることから，(1)より，

$$4t^3-8t+4=4 \iff t(t^2-2)=0 \qquad \therefore \quad t=0,\ \pm\sqrt{2}$$

$t=\pm\sqrt{2}$ のとき，直線③は直線②と一致するから不適である.

$t=0$ のとき，直線③は $y=4x+2$ であり，このとき，

$$f(x)-(4x+2)=x^2(x-2)(x+2)$$

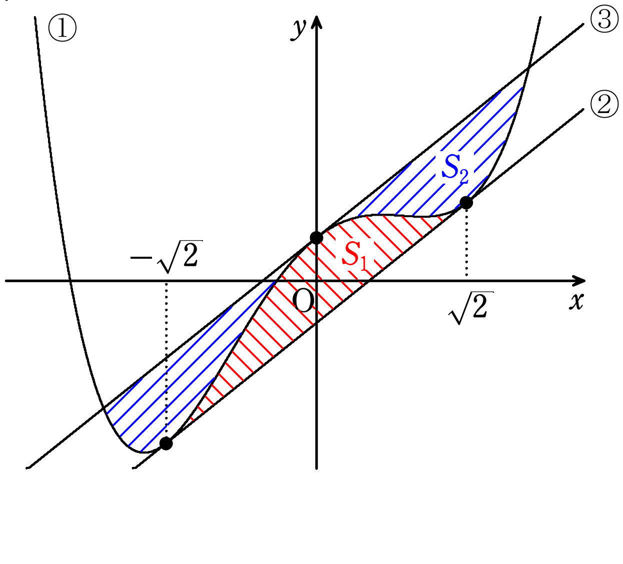
となるから，確かに曲線①にただ1点で接する.

よって，直線③の方程式は，　$\boldsymbol{y=4x+2}$

(3)　(2)までの結果から，①～③を図示すると右図のようになる.

よって，求める面積は，

$$S_1=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\{(x^4-4x^2+4x+2)-(4x-2)\}dx$$
$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2dx$$
$$=\frac{1}{30}\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}^5=\boldsymbol{\frac{64\sqrt{2}}{15}}$$



$\boxed{\text{補足}}$　積分計算には以下を用いた.

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=\frac{m!\,n!\,(-1)^n}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

(4)　曲線①と曲線③の方程式を連立して，

$$x^4-4x^2+4x+2=4x+2 \iff x^2(x+2)(x-2)=0 \qquad \therefore \quad x=-2,\ 0,\ 2$$

よって，偶関数の性質を利用すると，

$$S_2=\int_{-2}^{2}\{(4x+2)-(x^4-4x^2+4x+2)\}dx=\int_{-2}^{2}(4x^2-x^4)dx$$

$$==2\int_0^2(4x^2-x^4)dx=2\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$=2^6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2^7}{15}=\boldsymbol{\frac{128}{15}}$$

(5)　$f'(x)=4x^3-8x+4=0 \iff (x-1)(x^2+x-1)=0 \qquad \therefore \quad x=1$　または　$x^2+x-1=0$　……⑪

⑪より，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ であるから，これらをα，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする．

$\alpha<1<\beta$ であるから $\gamma=1$ である．

また，$f(x)$ を x^2+x-1 で割ると，

$$f(x)=(x^2+x-1)(x^2-x-2)+5x$$

が成り立ち，αは⑪の解であることから $\alpha^2+\alpha-1=0$ が成り立つから，

$$f(\alpha)=(\alpha^2+\alpha-1)(\alpha^2-\alpha-2)+5\alpha=5\alpha$$

同様に，　$f(\beta)=5\beta$

よって，3点$(\alpha,\ 5\alpha)$，$(\beta,\ 5\beta)$，$(1,\ 3)$ を通る放物線の方程式を求めればよい．

この方程式を $y=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$ とおく．

まず，$(1,\ 3)$ を通ることから，　$3=a+b+c \qquad \therefore \quad c=3-a-b$

よって，求める放物線は　$y=ax^2+bx+3-a-b$

これが$(\alpha,\ 5\alpha)$，$(\beta,\ 5\beta)$ を通ることから，

$$\begin{cases} 5\alpha=a\alpha^2+b\alpha+3-a-b \\ 5\beta=a\beta^2+b\beta+3-a-b \end{cases}$$

これらの和と差をとると，

$$\begin{cases} 5(\alpha+\beta)=a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+6-2a-2b \\ 5(\alpha-\beta)=a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5(\alpha+\beta)=a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+b(\alpha+\beta)+6-2a-2b & \cdots\cdots⑫ \\ 5(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\} & \cdots\cdots⑬ \end{cases}$$

α，βは⑪の2解であるから，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-1$

これと $\alpha-\beta\neq 0$ より，

⑬ $\iff 5=-a+b \qquad \therefore \quad b=a+5$

⑫に代入すると，

$$-5=a\{(-1)^2-2(-1)\}-(a+5)+6-2a-2(a+5) \iff -5=-2a-9 \qquad \therefore \quad a=-2$$

以上から，求める放物線の方程式は，　$\boldsymbol{y=-2x^2+3x+2}$

$\boxed{\text{参考}}$ 式の特徴に注目すると，次のような解き方も可能である．

(1) $f(x)-$(x の 1 次式) が (x の 2 次式)^2 となるように x の 1 次式を選ぶと，

$$f(x)=x^4-4x^2+4x+2 \iff f(x)-(4x+4)=x^4-4x^2+4$$
$$\iff f(x)-(4x+4)=(x^2-2)^2$$
$$\iff f(x)-(4x+4)=(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$$

よって，$y=f(x)$ と $y=4x+4$ は $x=-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$ において接するから，直線 ② の方程式は,

$$\boldsymbol{y=4x+4}$$

(2) 直線 ③ は直線 ② に平行であるから，この方程式は $y=4x+k$ とおける．

$$f(x)-(4x+k)=x^4-4x^2+2-k$$

このとき右辺は偶関数であるから，① と ③ がただ 1 点で接するのは $x=0$ のときに限られる．

よって，$f(0)=2$ であるから，直線 ③ の方程式は

$$\boldsymbol{y=4x+2}$$

(4) $f'(x)=4x^3-8x+4=0 \iff x^3-2x+1=0$

$f(x)$ を x^3-2x+1 で割ると，

$$f(x)=x(x^3-2x+1)-2x^2+3x+2$$
$$\iff f(x)-(-2x^2+3x+2)=x(x^3-2x+1)$$

$g(x)=-2x^2+3x+2$ とおくと，$f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$ であるから，

$$\begin{cases} f(\alpha)-g(\alpha)=0 \\ f(\beta)-g(\beta)=0 \\ f(\gamma)-g(\gamma)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f(\beta)=g(\beta) \\ f(\gamma)=g(\gamma) \end{cases}$$

よって，$y=g(x)$ は 3 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$，$(\gamma,\ f(\gamma))$ を通り，y 軸に平行な軸をもつ放物線である．

3 点を通る放物線は一意に定まるから，求める放物線の方程式は,

$$\boldsymbol{y=-2x^2+3x+2}$$

4

2つの事象を，

　　A：感染症 A に感染している，

　　X：検査 X で陽性と判定される

とすると，与えられた条件から，

$$P_A(X)=\frac{7}{10},\quad P_{\overline{A}}(X)=\frac{1}{10},\quad P(A)=\frac{1}{100}$$

である．

(1)　感染症 A にかかっていて，かつ検査 X で陽性と判定される確率は，

$$P(A\cap X)=P_A(X)\times P(A)=\frac{7}{10}\times\frac{1}{100}=\mathbf{\frac{7}{1000}}$$

(2)　検査 X で陽性と判定される確率は，実際に感染症 A に感染している場合と，感染していない場合に注意すると，

$$\begin{aligned}P(X)&=P(A\cap X)+P(\overline{A}\cap X)=\frac{7}{1000}+P_{\overline{A}}(X)\times P(\overline{A})\\&=\frac{7}{1000}+\frac{1}{10}\times\left(1-\frac{1}{100}\right)\\&=\frac{7+99}{1000}=\mathbf{\frac{53}{500}}\end{aligned}$$

(3)　検査 X で陽性と判定された人が実際に感染症 A に感染している確率は，(1)，(2) より，

$$P_X(A)=\frac{P(X\cap A)}{P(X)}=\frac{\frac{7}{1000}}{\frac{53}{500}}=\mathbf{\frac{7}{106}}$$

(4)　検査 X で陽性と判定されなかった人が実際に感染症 A に感染していない確率は，

$$P_{\overline{X}}(\overline{A})=\frac{P(\overline{X}\cap\overline{A})}{P(\overline{X})}=\frac{P(\overline{X}\cap\overline{A})}{P(\overline{X}\cap A)+P(\overline{X}\cap\overline{A})}$$

$P_{\overline{A}}(X)=\frac{1}{10}$ より，$P_{\overline{A}}(\overline{X})=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$ であるから，

$$P(\overline{X}\cap\overline{A})=P_{\overline{A}}(\overline{X})\times P(\overline{X})=\frac{9}{10}\times\frac{99}{100}$$

また，$P_A(X)=\frac{7}{10}$ より，$P_A(\overline{X})=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$ であるから，

$$P(\overline{X}\cap A)=P_A(\overline{X})\times P(A)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{100}$$

よって，求める確率は，

$$P_{\overline{X}}(\overline{A})=\frac{\frac{99}{100}\times\frac{9}{10}}{\frac{99}{100}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{100}\times\frac{3}{10}}=\frac{99\cdot 3}{99\cdot 3+1}=\mathbf{\frac{297}{298}}$$

(5)　感染症Aに感染している人が，１回目，2回目の検査でともに陽性と判定される確率は,

$$P(A)\times P_A(X)\times P_A(X)=\frac{1}{100}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}$$

また，，感染症Aに感染していない人が，1回目，２回目の検査でともに陽性と判定される確率は,

$$P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(X)\times P_{\overline{A}}(X)=\frac{99}{100}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$$

したがって，2回目の検査Xでも陽性と判定された人が実際に感染症Aに感染している確率は,

$$\frac{\frac{1}{100}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}}{\frac{99}{100}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{100}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}}=\frac{49}{99+49}=\boldsymbol{\frac{49}{148}}$$