2025年度　東京慈恵会医科大学

【　講　評　】

例年と同様に，大問4題での出題であった．確率，数学Ⅲ微分法・積分法，整数の性質といった頻出分野からの出題であったため，対策ができていた人にとっては取り組みやすい試験であっただろう．解けるところを確実に解き，55%程度の得点を目指したい．以下，大問ごとに述べる．

1．確率【標準】

（ア）は典型問題であるから落とせない．（イ）は余事象を用いてもよいし，素直に数え上げを行ってもよい．確実に得点したい．

2．数学Ⅲ微分法・積分法【やや難】

(1) 定積分の不等式証明は典型問題で，(2) 定積分計算も簡単なものなのでどちらも落とせない．(3) 級数の不等式証明は，(2) の誘導にしたがって面積（定積分）を用いると，下からの評価がうまくいかない．評価する値が数列和の計算結果であることを見抜き，平均値の定理を用いることに気づけるかどうかがポイントとなる．(3) は出来なくても大きな差はつかないだろう．

3．いろいろな曲線／整数の性質【やや難】

(1) は双曲線と円の共有点考察で，やや計算が煩雑であることと，r を p で表した後に r が自然数であることに注意して答えを出す必要がある．(2) は素数を求める問題の定石通り，偶素数の存在に注目するとよい．類題を解いた経験がある人には取り組みやすかっただろう．(1) が正解でないと (2)は解けないので，この問題の得点率は低いだろう．

4．複素数平面（軌跡）【標準】

複素数平面内の動点に関する絶対値のとり得る値の範囲を求める問題であった．式の見た目は複雑であるが，変形してみると容易に軌跡を求めることができる．また，この式変形がうまくいかないようであれば，$z=x+yi$ とおく方法に切り替えてもよい．軌跡が円の一部であることがわかれば，定石通り極形式を用いて絶対値のとり得る値の範囲を考えるだけである．この問題は完答を目指したい．

【　解　答　】

1．（ア）$\dfrac{1}{3}$，　（イ）$\dfrac{31}{54}$

2．(1)　解説参照　(2)　$-\dfrac{1}{\log x}+C$　(C は積分定数)　(3)　解説参照

3．(1)　$r=p-1$　(2)　$(x,\ y,\ p)=(47,\ 2,\ 41)$

4．$\dfrac{\sqrt{13}}{2}<\left|\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{z-\overline{z}}{2}+1\right|\leqq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

【　解　説　】

１．

(ア)　積 $X_1X_2X_3$ が10の倍数にならない場合を考える．

偶数の目が出ないとき　$3^3=27$ 通り

5の目が出ないとき　$5^3=125$ 通り

偶数の目が出ないかつ5の目が出ない，すなわち1，3の目だけが出るとき　2^3 通り

よって，積 $X_1X_2X_3$ が10の倍数にならないのは

$27+125-8=144$ 通り

したがって，積 $X_1X_2X_3$ が10の倍数になる確率は　$1-\dfrac{144}{6^3}=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

(イ)　3つのサイコロの目の組合せを $\{x,\ y,\ z\}$ と表す．

和 X_1+X_2，X_2+X_3，X_3+X_1 のいずれかが6の倍数になる場合を考える．

(ｉ) $\{1,\ 5,\ a\}$ のとき

$a\fallingdotseq 1$，5 のときの目の出方は $3!$ 通り，$a=1$，5 のときの目の出方は $\dfrac{3!}{2!}=3$ 通りであるから，

$4\times 3!+2\times 3=30$ 通り

(ii) $\{2,\ 4,\ a\}$ のとき

(ｉ)と同様であるから　30通り

(iii) $\{3,\ 3,\ a\}$ のとき

$a\fallingdotseq 3$ のときの目の出方は $\dfrac{3!}{2!}=3$ 通り，$a=3$ のときの目の出方は1通りであるから

$5\times 3+1=16$ 通り

(iv) $\{6,\ 6,\ a\}$ のとき

(iii)と同様であるから　16通り

(ｉ)～(iv)より，和 X_1+X_2，X_2+X_3，X_3+X_1 のいずれかが6の倍数になる場合は

$30+30+16+16=92$ 通り

であるから，和 X_1+X_2，X_2+X_3，X_3+X_1 がいずれも6の倍数にならない確率は，

$$1-\frac{92}{6^3}=1-\frac{23}{54}=\frac{31}{54}$$

別解　(イ)は余事象を考えずに数え上げてもよい．

3つのサイコロの目の組合せを $\{a,\ b,\ c\}$ と表す．

すべての目が同じであるとき，$\{1,\ 1,\ 1\}$，$\{2,\ 2,\ 2\}$，$\{4,\ 4,\ 4\}$，$\{5,\ 5,\ 5\}$ の4通りである．

2つの目だけが同じであるとき，

$\{1,\ 1,\ a\}\ (a\fallingdotseq 5)$，$\{2,\ 2,\ b\}\ (b\fallingdotseq 4)$，$\{4,\ 4,\ c\}\ (c\fallingdotseq 2)$，$\{5,\ 5,\ d\}\ (d\fallingdotseq 1)$

であるから，目の出方を考えると，

$4\times 4\times\dfrac{3!}{2!}=48$ 通り

3つの目が異なるとき，

$\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 6\}$，$\{1,\ 3,\ 4\}$，$\{1,\ 3,\ 6\}$，$\{1,\ 4,\ 6\}$，

$\{2,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 6\}$, $\{2,\ 5,\ 6\}$,

$\{3,\ 4,\ 5\}$, $\{3,\ 4,\ 6\}$, $\{3,\ 5,\ 6\}$,

$\{4,\ 5,\ 6\}$

であるから，目の出方を考えると

$12\times 3!=72$ 通り

よって，求める確率は

$$\frac{4+48+72}{6^3}=\frac{124}{216}=\frac{31}{54}$$

2．

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　　$\log n \leqq \log(x+n) \leqq \log(n+1)$

$n \geqq 3$ のとき $\log n > 0$ であるから　$\dfrac{1}{\log(n+1)} \leqq \dfrac{1}{\log(x+n)} \leqq \dfrac{1}{\log n}$

$x \geqq 0$ であるから　$\dfrac{x}{\log(n+1)} \leqq \dfrac{x}{\log(x+n)} \leqq \dfrac{x}{\log n}$

各辺を $0 \leqq x \leqq 1$ で定積分すると

$$\int_0^1 \frac{x}{\log(n+1)}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log n}\,dx$$

このとき，

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

であるから

$$\frac{1}{2\log(n+1)} \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)}\,dx \leqq \frac{1}{2\log n}$$

が成り立つ．

(2)　C を積分定数とすると，

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int (\log x)' \cdot (\log x)^{-2}\,dx = -(\log x)^{-1} + C = -\frac{1}{\log x} + C$$

(3)　(1) より $k \geqq 3$ のとき　$\dfrac{1}{2\log(k+1)} \leqq \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}\,dx \leqq \frac{1}{2\log k}$

$\dfrac{2}{k\log k}\ (>0)$ をかけて　$\dfrac{1}{k\log k\log(k+1)} \leqq \dfrac{2}{k\log k}\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}\,dx \leqq \frac{1}{k(\log k)^2}$　……①

ここで $f(x) = \log x$ とおくと，$x > 0$ において連続かつ微分可能であり　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

よって，平均値の定理により

$$\begin{cases} \dfrac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k} = f'(c) \\ k < c < k+1 \end{cases} \iff \begin{cases} \log(k+1) - \log k = \dfrac{1}{c} \\ k < c < k+1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

となる実数 c が存在する．

②，③ を用いると

$$\frac{1}{k\log k\log(k+1)} > \frac{1}{c\log k\log(k+1)} = \frac{\log(k+1)-\log k}{\log k\log(k+1)} = \frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)} \quad \cdots\cdots ③$$

また，② と同様にして，

$$\begin{cases} \log k - \log(k-1) = \dfrac{1}{c} \\ k-1 < c < k \end{cases}$$

も成り立つから，これと $\log(k-1) \leqq \log k$ より

$$\frac{1}{k(\log k)^2} \leqq \frac{1}{k\log(k-1)\log k} < \frac{1}{c\log(k-1)\log k} = \frac{\log k - \log(k-1)}{\log(k-1)\log k} = \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k} \quad \cdots\cdots ④$$

①，③，④ より

$$\frac{1}{\log k}-\frac{1}{\log(k+1)} \leqq \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}\,dx \leqq \frac{1}{\log(k-1)}-\frac{1}{\log k}$$

が成り立つ.

各辺の和をとると

$$\sum_{k=n}^{m}\left\{\frac{1}{\log k}-\frac{1}{\log(k+1)}\right\} \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}\,dx \leqq \sum_{k=n}^{m}\left\{\frac{1}{\log(k-1)}-\frac{1}{\log k}\right\}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(m+1)} \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}\,dx \leqq \frac{1}{\log(n-1)}-\frac{1}{\log m}$$

が成り立つ.

別解 ① 式の右側は，(2) の誘導にしたがって次のように評価することもできる.

① 式の各辺の和をとると

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\log k\log(k+1)} \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}\,dx \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\log k)^2}$$

ここで，$f(x)=x(\log x)^2$ とおくと，$x \geqq 1$ において x も $\log x$ も正かつ単調増加であるから，

$f(x)$ は $x \geqq 1$ において単調増加であり，$k-1 \leqq x \leqq k$ のとき

$$x(\log x)^2 \leqq k(\log k)^2 \qquad \therefore\quad \frac{1}{k(\log k)^2} \leqq \frac{1}{x(\log x)^2}$$

両辺を $k-1 \leqq x \leqq k$ で定積分すると

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k(\log k)^2}\,dx \leqq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx \qquad \therefore\quad \frac{1}{k(\log k)^2} \leqq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$$

両辺の和をとると

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\log k)^2} \leqq \sum_{k=n}^{m}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{n-1}^{m}\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\log x}\right]_{n-1}^{m} = \frac{1}{\log(n-1)}-\frac{1}{\log m}$$

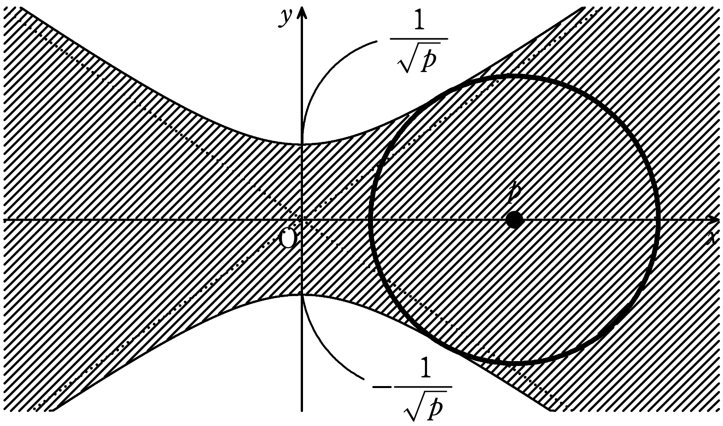
3．

$p \geqq 2$ のとき $x^2 - py^2 \geqq -1$ より

$$x^2 - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2} \geqq -1$$

であるから， D の境界線は，中心が原点で，頂点 $\left(0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$，漸近線 $y = \pm\frac{1}{\sqrt{p}}x$ の双曲線であり，

D は原点を含む下図の斜線部分の領域である．



また， 円 $(x-p)^2 + y^2 = r$ は中心 $(p,\ 0)$，半径 $\sqrt{r}$ の円で，中心が領域 D に含まれることから，この円が領域 D に含まれるのは，境界線である双曲線と接する，または共有点を持たないときである．

$x^2 - py^2 = -1$ より　$y^2 = \frac{1}{p}(x^2+1)$

これと $(x-p)^2 + y^2 = r$ を連立させて　$(x-p)^2 + \frac{1}{p}(x^2+1) = r$

$$p(x-p)^2 + x^2 + 1 = pr \qquad \therefore\ (p+1)x^2 - 2p^2x + p^3 - pr + 1 = 0 \quad \cdots\cdots①$$

これが共有点の x 座標の満たす方程式である．

$p \geqq 2$ より $p+1 > 0$ であるから，① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = p^4 - (p+1)(p^3 - pr + 1) \leqq 0$$

$$(p^2 + p)r \leqq p^3 + p + 1$$

$$\therefore\ r \leqq \frac{p^3 + p + 1}{p^2 + p} = p - 1 + \frac{2p+1}{p^2+p} \quad \cdots\cdots②$$

$p \geqq 2$ より

$$0 < \frac{2p+1}{p^2+p} = \frac{p+(p+1)}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

であるから，② を満たす最大の自然数 r は　$r = p - 1$

(2)　(1) より　$(x-p)^2 + y^2 = p - 1$　$\cdots\cdots③$

x，y，p は互いに異なる素数であるから，③ について

$$p - 1 = (x-p)^2 + y^2 \geqq 1^2 + 2^2 = 5 \qquad \therefore\ p \geqq 6$$

よって p は素数であるから奇数であり， $p-1$ が偶数であるから，③ の左辺も偶数である．

したがって，次の 2 つの場合が考えられる．

(ⅰ)　$x-p$，y が共に偶数のとき

p が奇数であることから x は奇数であり，偶数の素数は2のみであるから $y=2$ である．

$$(x-p)^2+2^2=p-1 \qquad \therefore \quad (x-p)^2=p-5 \quad \cdots\cdots ④$$

この式が成り立つとき，$p-5$ は偶数の平方数となるから，p が小さい順にこれを調べると

$p-5$	4	16	36
p	9	21	41

したがって，最小の素数 p は $p=41$ であり，このとき ④ より

$$(x-41)^2=36 \iff x-41=\pm 6 \qquad \therefore \quad x=47,\ 35$$

x は素数であるから　$x=47$

(ⅱ)　$x-p$，y が共に奇数

$x-p$ が奇数で p も奇数であるから x は偶数で $x=2$ であり，③ より

$$(2-p)^2+y^2=p-1 \qquad \therefore \quad y^2=-p^2+5p-5$$

$y \geqq 3$ より $y^2 \geqq 9$ であるから　$-p^2+5p-5 \geqq 9$　　$p(p-5) \leqq -14$

これを満たす素数 $p\ (\geqq 7)$ は存在しない．

(ⅰ)，(ⅱ) より，p が最小の素数となる $(x,\ y,\ p)$ は　$(x,\ y,\ p)=(\mathbf{47},\ \mathbf{2},\ \mathbf{41})$

別解　D の境界線の双曲線と円が接する条件については，次のように考えてもよい．

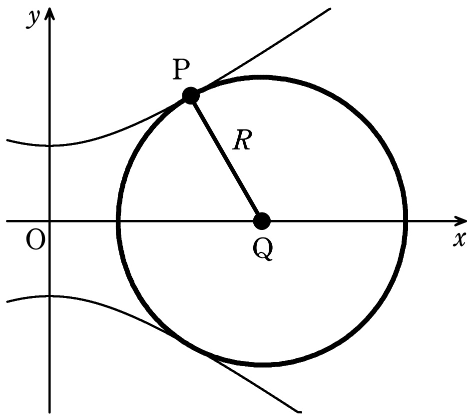
双曲線上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$，$s^2-pt^2=-1$ における接線の方程式は　$sx-pty=-1$

これに垂直なベクトルの1つは　$\vec{u}=(s,\ -pt)$

双曲線と円が接するとき，円の中心 $\mathrm{Q}(p,\ 0)$ は，双曲線上の $\mathrm{P}(s,\ t)$ における法線上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\vec{u}=(s,\ t)+k(s,\ -pt)=(s+ks,\ t-kpt)$$

となる実数 k が存在する．



$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(p,\ 0)$ より　$\begin{cases} p=s+ks & \cdots\cdots ④ \\ 0=t-kpt & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$

$t \fallingdotseq 0$ であるから ⑤ より　$k=\dfrac{1}{p}$

④ に代入すると　$p=s+\dfrac{s}{p}=s\left(\dfrac{p+1}{p}\right)$　　$\therefore \quad s=\dfrac{p^2}{p+1}$

また，$s^2-pt^2=-1$ が成り立つから　$t^2=\dfrac{s^2+1}{p}$

よって，双曲線と円が接するときの半径を R とすると，

$$\begin{aligned} R^2=s^2+t^2=s^2+\frac{s^2+1}{p}&=s^2\left(\frac{p+1}{p}\right)+\frac{1}{p}=\left(\frac{p^2}{p+1}\right)^2\cdot\left(\frac{p+1}{p}\right)+\frac{1}{p}=\frac{p^3}{p+1}+\frac{1}{p} \\ &=\frac{(p+1)(p^2-p+1)+2}{p+1}+\frac{1}{p}=p^2-p+1+\frac{2}{p+1}+\frac{1}{p} \end{aligned}$$

これを $f(p)$ とすると $f(p)-(p-1)^2>0$，$f(p)-p^2<0$ が成り立つから

$$(p-1)^2<R^2<p^2 \qquad \therefore \quad p-1<R<p$$

よって $r \leqq R$ を満たす最大の自然数 r は　$r=p-1$

4.

$z+\dfrac{1}{z-1}$ が実数であるとき，　$z+\dfrac{1}{z-1}=\overline{z+\dfrac{1}{z-1}}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}-1}$

$$z-\overline{z}+\frac{1}{z-1}-\frac{1}{\overline{z}-1}=0$$

$$z-\overline{z}-\frac{z-\overline{z}}{(z-1)(\overline{z}-1)}=0$$

$$\therefore\ (z-\overline{z})\{|z-1|^2-1\}=0$$

z は虚数より $z\fallingdotseq\overline{z}$，すなわち $z-\overline{z}\fallingdotseq 0$ であるから

$$|z-1|^2=1 \qquad \therefore\ |z-1|=1 \quad \cdots\cdots①$$

また，$z+\dfrac{1}{z-1}$ が正の実数であるから，実部について

$$\frac{1}{2}\left\{z+\frac{1}{z-1}+\left(\overline{z+\frac{1}{z-1}}\right)\right\}>0$$

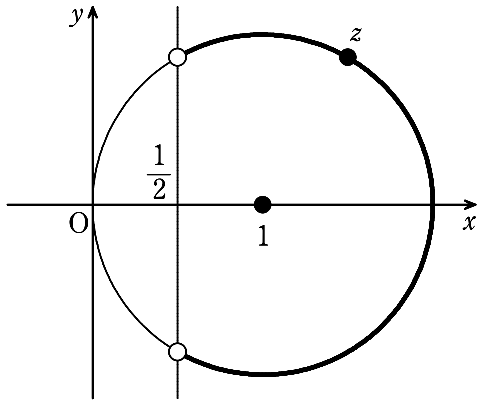
$$z+\frac{1}{z-1}+\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}-1}>0$$

$$z+\overline{z}+\frac{z+\overline{z}-2}{(z-1)(\overline{z}-1)}>0$$

$$z+\overline{z}+z+\overline{z}-2>0 \quad (\because\ ①) \qquad \therefore\ \frac{1}{2}(z+\overline{z})>\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots②$$

①，② より z は点 1 を中心とする半径 1 の円周上の，実部が $\dfrac{1}{2}$ よりも大きな部分に存在するから，

$$z=1+\cos\theta+i\sin\theta \quad \left(-\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{2}{3}\pi\right)$$



とおくことができ，$w=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{z-\overline{z}}{2}+1$ とすると．

$$w=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}-i\sin\theta+1$$
$$==\cos\theta-i\sin\theta-i\sin\theta+1=1+\cos\theta-2i\sin\theta$$

よって，

$$|w|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-2\sin\theta)^2}$$
$$==\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+4(1-\cos^2\theta)}$$
$$=\sqrt{-3\cos^2\theta+2\cos\theta+5}$$
$$=\sqrt{-3\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}}$$

$-\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ より $-\dfrac{1}{2}<\cos\theta\leqq 1$ であり，

$$\cos\theta=\frac{1}{3} \text{ のとき} \quad |w|=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos\theta=-\frac{1}{2} \text{ のとき} \quad |w|=\sqrt{-\frac{3}{4}-1+5}=\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

であるから，$|w|$ のとり得る値の範囲は　$\dfrac{\sqrt{13}}{2}<|w|=\left|\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{z-\overline{z}}{2}+1\right|\leqq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

別解　z での式変形が難しく感じるようであれば，実部，虚部を設定すればよい．

z は虚数であるから $z=x+yi\ (y\neq 0)$ とおくと，

$$z+\frac{1}{z-1}=x+yi+\frac{1}{x-1+yi}=x+yi+\frac{x-1-yi}{(x-1)^2+y^2}$$
$$=x+\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}+\left\{y-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right\}i$$

これが正の実数となるとき

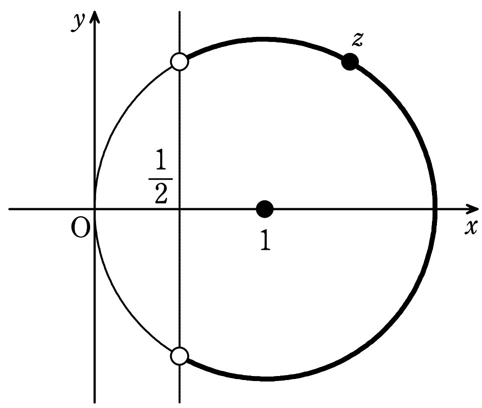
$$\begin{cases} x+\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}>0 & \cdots\cdots③ \\ y-\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}=0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

② より　$y\{(x-1)^2+y^2-1\}=0$

$y\neq 0$ であるから　$(x-1)^2+y^2=1$　……⑤

これを ① に代入すると　$x+\dfrac{x-1}{1}>0$　　$\therefore\ x>\dfrac{1}{2}$　……⑥

よって，z は右の図の太線部分に存在する．



このとき $w=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{z-\overline{z}}{2}+1$ について

$$w=\frac{1}{(x-1)+yi}-yi+1=\frac{x-1-yi}{(x-1)^2+y^2}-yi+1$$
$$=x-2yi\quad(\because\ ⑤)$$

よって　$|w|=\sqrt{x^2+(-2y)^2}=\sqrt{x^2+4y^2}$

③ より $y^2=1-(x-1)^2=-x^2+2x$ であるから

$$|w|=\sqrt{x^2+4(-x^2+2x)}=\sqrt{-3x^2+8x}=\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{16}{3}}$$

⑤，⑥ より $\dfrac{1}{2}<x\leqq 2$ であり，

$x=\dfrac{4}{3}$ のとき　$|w|=\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$|w|=\sqrt{-3\cdot\dfrac{1}{4}+4}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

であるから，$|w|$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\sqrt{13}}{2}<|w|=\left|\frac{1}{z-1}-\frac{z-\overline{z}}{2}+1\right|\leqq\frac{4\sqrt{3}}{3}$$