解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2025年度　昭和大学Ⅰ期

【　講　評　】

例年通り，大問4題で出題された．昨年と同様，小問集合は1題であった．全体的に難易度が上がり，計算が煩雑なものもあるため，50% 以上の得点ができれば成功と言えるだろう．以下，大問ごとに特徴を述べる．

1 複素数平面（絶対値／極形式／三角形の面積）【標準】

絶対値，極形式の計算に関する問題であった．発想的に難しい点はないが，複素数の計算に慣れていないとうまく解けなかっただろう．また，(2)，(3) が解けなくても，(4) が解けることを見逃さないようにしたい．

2 小問集合（整数の性質【やや易】／多項式の除法【標準】／数Ⅲ積分法【標準】／数Ⅲ積分法【標準】）

(1) は定石通りユークリッドの互除法を用いるだけである. (2) は剰余の定理を用いるだけであるが, 計算が煩雑であり, 完答が難しい. (3) は絶対値を外して領域を図示し, 面積を求めるだけである. (4) は過去に出題されてこなっかタイプの問題であるため, 類題を解いた経験がないと厳しいだろう.

3 積分法（数学Ⅲ）【やや難】

空間座標内の四面体に関する問題であった. 図形の特徴から, 点 A が xy 平面上の単位円上, 点 B, C が yz 平面上の単位円上にあることが気づけるかどうかがポイントで, このことに気づければ (1), (2) は解けたであろう. ここまでが解けていれば (3) の体積を求めるのは難しくないが, (1), (2) で解けなかった人も多いと予想されるため, この大問の得点率は低いだろう.

4 確率【標準】

サイコロの結果によって座標平面上の点を移動させる, 反復試行の確率の典型問題であった. (1) は (2) の具体例であるから, (2) から解くとよい. また, (3) も確率の最大値を考える典型問題であった. 他の大問のことを考えると, これは落とせない.

【　解　答　】

1 (1) $\dfrac{\beta}{\alpha}=2(1\pm i)=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^4=-64$　(2) $\sqrt{26}$

(3) $a=\dfrac{3n-1}{2}$，$b=3n$　(4) 2

2 (1)(1−1) 1,　(1−2) $a_1=19$，$a_2=1$，$a_3=7$，$a_4=12$　(2) $(-4,\ 4)$，$(-2,\ 2)$，$(-2,\ 4)$

(3)(3−1) 解説参照　(3−2) $\dfrac{3}{2}\log 2$　(4) 88

3 (1) $-1<t<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<t<1$，　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$，　(3) $V_x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$，$V_y=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\pi$，$V_z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

4 (1) $P_1=\dfrac{1}{729}$，$P_2=\dfrac{4}{729}$，$P_3=\dfrac{28}{2187}$　(2) $n=10,\ 11$

【　解　説　】

$\boxed{1}$

(1)　$|\alpha|=\sqrt{2}$ より　$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=2$　……①，$|\beta|=4$ より　$|\beta|^2=\beta\overline{\beta}=16$　……②

$|4\alpha-\beta|=4$ より　$|4\alpha-\beta|^2=(4\alpha-\beta)(4\overline{\alpha}-\overline{\beta})=16$　　$\therefore$　$16\alpha\overline{\alpha}-4(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)+\beta\overline{\beta}=16$

①，② より　$16\cdot 2-4(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)+16=16$　　$\therefore$　$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=8$　……③

① より $\overline{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}$，② より $\overline{\beta}=\dfrac{16}{\beta}$ であるから　$\dfrac{16\alpha}{\beta}+\dfrac{2\beta}{\alpha}=8$　　$\therefore$　$\dfrac{\beta}{\alpha}+8\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}=4$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=t$ とおくと　$t+\dfrac{8}{t}=4$　　$\therefore$　$t^2-4t+8=0$

これを解くと　$t=2\pm\sqrt{4-8}=2\pm 2i$　　$\therefore$　$\dfrac{\beta}{\alpha}=\mathbf{2\pm 2}\boldsymbol{i}$

また，$\dfrac{\beta}{\alpha}=2(1\pm i)=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ であるから，

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4=(2\sqrt{2})^4\{\cos(\pm\pi)+i\sin(\pm\pi)\}=\mathbf{-64}$$

(2)　①，②，③より　$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=2+8+16=26$

$|\alpha+\beta|\geqq 0$ であるから　$|\alpha+\beta|=\sqrt{\mathbf{26}}$

(3)　$|\alpha|=\sqrt{2}$ であるから　$|\alpha^n+\beta^n|=|\alpha^n|\left|1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|=\sqrt{2^n}\left|1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|$

ここで，$\left|1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|^2=\left\{1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right\}\left\{1+\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}\right\}=1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n+\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}+\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|^{2n}$

(2) より $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n=(2\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(\pm\dfrac{n}{4}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{n}{4}\pi\right)\right\}$ であるから，

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n+\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}=2\cdot(2\sqrt{2})^n\cos\left(\pm\frac{n}{4}\pi\right)=2^{\frac{3}{2}n+1}\cos\left(\pm\frac{n}{4}\pi\right)$$

また，$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=2\sqrt{2}$ より　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|^{2n}=(2\sqrt{2})^{2n}=2^{3n}$

よって　$\left|1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|^2=1+2^{\frac{3}{2}n+1}\cos\left(\pm\dfrac{n}{4}\pi\right)+2^{3n}$

$\boldsymbol{n}$ が 16 で割ると 3 余る整数であるとき，$\boldsymbol{k}$ を整数として $\boldsymbol{n}=16\boldsymbol{k}+3$ と表せるから，

$$\cos\left(\pm\frac{n}{4}\pi\right)=\cos\left(\pm\frac{16k+3}{4}\pi\right)=\cos\left(\pm 4k\pi\pm\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\left|1+\left(\dfrac{\beta}{a}\right)^n\right|=\sqrt{1+2^{\frac{3}{2}n+1}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+2^{3n}}=\sqrt{1-2^{\frac{3n-1}{2}}+2^{3n}}$　　$\therefore$　$a=\dfrac{\mathbf{3}\boldsymbol{n}\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$，$b=\mathbf{3}\boldsymbol{n}$

(4)　$|\alpha|=\sqrt{2}$，$|\beta|=4$，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\pm\dfrac{\pi}{4}$ より $\mathrm{OA}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OB}=4$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{4}$ であるから，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\mathbf{2}$$

$\boxed{2}$

(1) (1−1) $2025=1928\cdot 1+97$,

$1928=97\cdot 19+85$,

$97=85\cdot 1+12$

$85=12\cdot 7+1$

であるから，ユークリッドの互除法により，2025 と 1928 の最大公約数は **1** である.

(1−2) (1−1) を用いると，

$$\frac{2025}{1928}=\frac{1928+97}{1928}=1+\frac{97}{1928}=1+\cfrac{1}{\cfrac{97\cdot 19+85}{97}}$$

$$=1+\cfrac{1}{19+\cfrac{85}{97}}=1+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{\cfrac{85\cdot 1+12}{85}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{1+\cfrac{12}{85}}}=1+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{12\cdot 7+1}{12}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12}}}}$$

であるから　$a_1=\mathbf{19}$，$a_2=\mathbf{1}$，$a_3=\mathbf{7}$，$a_4=\mathbf{12}$

(2) $f\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(\frac{b}{2}\right)=0$ であるから，$g(x)$ が $f(x)$ で割り切れるとき $g\left(\frac{a}{2}\right)=g\left(\frac{b}{2}\right)=0$ が成り立つ.

$g\left(\frac{a}{2}\right)=0$ より　$f\left(\frac{a^2}{4}-2\right)=0 \iff \left(\frac{a^2}{4}-2-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a^2}{4}-2-\frac{b}{2}\right)=0$

$\iff (a^2-2a-8)(a^2-2b-8)=0$

$\iff (a-4)(a+2)(a^2-2b-8)=0$

$\iff a=4$，$a=-2$，$a^2-2b-8=0$ ……①

また，$g\left(\frac{b}{2}\right)=0$ より　$f\left(\frac{b^2}{4}-2\right)=0 \iff \left(\frac{b^2}{4}-2-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b^2}{4}-2-\frac{b}{2}\right)=0$

$\iff (b^2-2a-8)(b^2-2b-8)=0$

$\iff (b-4)(b+2)(b^2-2a-8)=0$

$\iff b=4$　または　$b=-2$　または　$b^2-2a-8=0$ ……②

① の 3 通りについて考える.

(ⅰ) $a=4$ のとき

② より　$b=4$　または　$b=-2$　または　$b=\pm 4$

これらのうち $a<b$ を満たすものは存在しない.

(ⅱ) $a=-2$ のとき

②より　$b=4$　または　$b=-2$　または　$b=\pm 2$

これらのうち $a<b$ を満たすものは　$(a,\ b)=(-2,\ 2),\ (-2,\ 4)$

(ⅲ) $a^2-2b-8=0$ のとき

②について,

$b=4$ のとき　$a^2=16$　$\therefore$　$a=\pm 4$

$b=-2$ のとき　$a^2=4$　$\therefore$　$a=\pm 2$

$b^2-2a-8=0$ のとき，すなわち $\begin{cases} a^2-2b-8=0 & \cdots\cdots③ \\ b^2-2a-8=0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$ のとき，③－④より

$$b^2-a^2-2(a-b)=0 \iff (b-a)(a+b+2)=0$$

$a<b$ より $b-a\neq 0$ であるから　$a+b+2=0$　$\therefore$　$b=-a-2$

これを③に代入すると　$a^2-2(-a-2)-8=0$　$\therefore$　$a^2+2a-4=0$

これを満たす整数 a は存在しない.

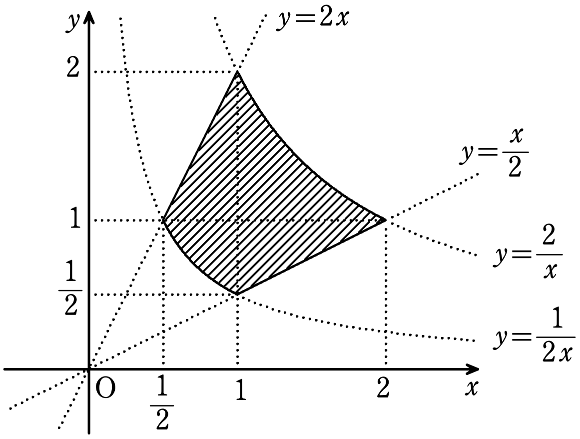
以上より，求める整数 $(a,\ b)$ の組は　$(a,\ b)=(-4,\ 4),\ (-2,\ 2),\ (-2,\ 4)$

(2−3)　真数条件より $x>0$，$y>0$ である.

$$\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|+\left|\log_{\frac{1}{2}} y\right|\leqq 1 \iff \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} xy\leqq 1 & (x\geqq 1,\ y\geqq 1) \\ \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{y}\leqq 1 & (x\geqq 1,\ 0<y<1) \\ \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{y}{x}\leqq 1 & (0<x<1,\ y\geqq 1) \\ \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{xy}\leqq 1 & (0<x<1,\ 0<y<1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y\leqq \dfrac{1}{2x} & (x\geqq 1,\ y\geqq 1) \\ y\geqq 2x & (x\geqq 1,\ 0<y<1) \\ y\leqq \dfrac{x}{2} & (0<x<1,\ y\geqq 1) \\ y\geqq \dfrac{2}{x} & (0<x<1,\ 0<y<1) \end{cases}$$

したがって，領域 E は下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む.

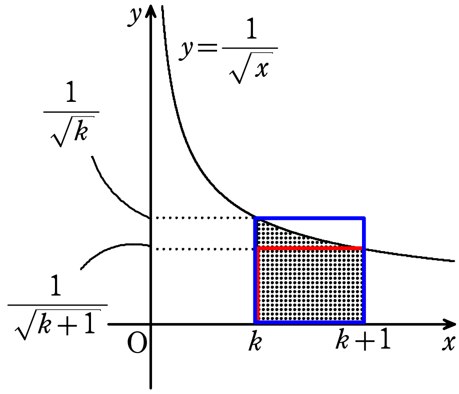


(3−2)　(3−1) より領域 E の面積 S は　$S=\frac{1}{2}(1+2)\cdot\frac{1}{2}+\int_1^2\frac{2}{x}\,dx-\left\{\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{2x}\,dx+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot 1\right\}$

$$=\frac{3}{4}+2\Big[\log|x|\Big]_1^2-\frac{1}{2}\Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{2}}^1-\frac{3}{4}$$

$$=2\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\log 2$$

(4)　$S_{2025}=\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}$ である．



自然数 k に対して $k\leqq x\leqq k+1$ のとき

$$\sqrt{k}\leqq\sqrt{x}\leqq\sqrt{k+1}\qquad\therefore\quad\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leqq\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{\sqrt{k}}$$

各辺を $k\leqq x\leqq k+1$ で定積分すると，等号は常には成り立たないから

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\,dx$$

$$\therefore\quad\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 2024$ で和をとると　$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\sum_{k=1}^{2024}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$2025=(45)^2$ であるから

$$\sum_{k=1}^{2024}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^{2025}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{2025}$$

$$=2(\sqrt{2025}-1)=2(45-1)=88$$

よって　$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<88<\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{\sqrt{k}}\iff\sum_{k=2}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}<88<\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\therefore\quad 88+\frac{1}{45}<\sum_{k=1}^{2025}\frac{1}{\sqrt{k}}<89$$

したがって，S_{2025} の整数部は **88** である．

$\boxed{3}$

(1)　Aは xy 平面上の点で $OA=1$ であるから，

$$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)\ \left(-\pi \leqq \alpha < \pi,\ ただし\ \alpha \fallingdotseq \pm\frac{\pi}{2}\right)$$

とおける．また，B，Cは yz 平面上の y 軸に関して対称な点で $OB=1$ であるから，

$$B(0,\ \cos\beta,\ \sin\beta)\ (0<\beta<\pi)$$

としても一般性は失われない．

このとき $t=\cos\beta$ であるから　$-1<\cos\beta<1$　　$\therefore$　$-1<t<1$　……①

△OABは正三角形であるから　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

よって　$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$　　$\therefore$　$t\sin\alpha=\frac{1}{2}$　……②

$\sin\alpha=0$，すなわち $\alpha=0$ のとき ② は成り立たないから　$t=\frac{1}{2\sin\alpha}$

$-\pi\leqq\alpha<\pi$，$\alpha\fallingdotseq 0$，$\pm\frac{\pi}{2}$ のとき　$0<|\sin\alpha|<1$　　$\therefore$　$\left|\frac{1}{2\sin\alpha}\right|>\frac{1}{2}$

したがって　$|t|>\frac{1}{2}$　$\Longleftrightarrow$　$t<-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<t$

これと ① の共通部をとると，t がとり得る範囲は　$-1<t<-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<t<1$

(2)　図の対称性から，(1) の $\frac{1}{2}<t<1$ について考える．このとき $0<\beta<\frac{\pi}{3}$，$0<\alpha<\pi$，$\alpha\fallingdotseq\frac{\pi}{2}$ である．

四面体OABCの表面積を S とすると，△OAB，△OACは合同な正三角形であり，$OA=OB=OC$，BC共通より △OBC≡△ABC であるから，

$$S=2\triangle OAB+2\triangle OBC$$
$$=2\times\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}+2\times\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\beta$$

となる．

$0<\beta<\frac{\pi}{3}$ より $0<2\beta<\frac{2}{3}\pi$ であるから，$2\beta=\frac{\pi}{2}$，すなわち $\beta=\frac{\pi}{4}$ のとき S は最大となり，その最大値は

$$S=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

また，このとき $t=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，② より　$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha=\frac{1}{2}$　　$\therefore$　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0<\alpha<\pi$，$\alpha\fallingdotseq\frac{\pi}{2}$ より $\alpha=\frac{\pi}{4}$ である．

よって，$2\beta=\frac{\pi}{2}$，すなわち $\beta=\frac{\pi}{4}$ のとき最大となり，その最大値は　$\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$

したがって，四面体OABCの表面積の最大値は

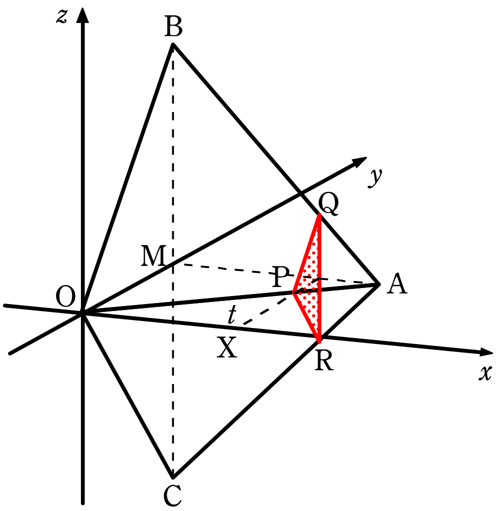
$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{1}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

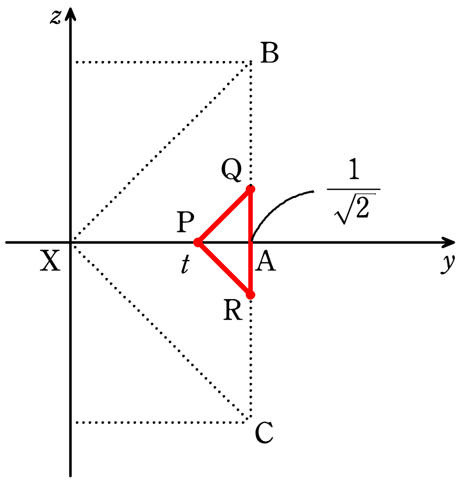
(3)　(2) より $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ の場合について考える．図の対称性から，$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときも同様である．

$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である．

(ア) V_x について

$\mathrm{X}(t,\ 0,\ 0)\left(0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とし，平面 $x=t$ と辺 OA，AB，AC との交点をそれぞれ P，Q，R とする．





$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}$ より $\mathrm{XQ}=\mathrm{XR}$ であるから，$x=t$ における断面の面積は

$$\pi(\mathrm{XQ})^2-\pi(\mathrm{XP})^2=\pi\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-t\right)^2-t^2\right\}=\pi(1-\sqrt{2}\,t)$$

よって　$V_x=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2}\,t)\,dr=\pi\left[t-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

(イ) V_y について

辺 BC の中点を M とすると，$\mathrm{MA}=\mathrm{MB}=\mathrm{MC}=\mathrm{MO}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で，どの 2 辺も直交することから，

V_y は底面の半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円錐の体積であるから

$$V_y=\frac{1}{3}\times\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

(ウ) V_z について

図形の対称性から $V_z=2V_x$ であるから　$V_z=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

4

原点を中心に15度反時計回りに回転する事象をAとすると，この確率は$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，

原点から距離を1だけ遠ざける事象をBとすると，この確率は$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$である.

(1)(2)　先にP_nを求める.

物体Aが点$(0,\ n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$に達するのは，事象$A$が6回，事象$B$が$n-1$回起こるときで，

$n+4$回目までにAが5回，Bが$n-1$回起こり，$n+5$回目にAが起こるときであるから，その確率は

$$\begin{aligned}P_n&={}_{n+4}\mathrm{C}_5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n\cdot 2^{n-1}}{5!\,3^{n+5}}\\&=\boldsymbol{\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n\cdot 2^{n-4}}{5\cdot 3^{n+6}}}\end{aligned}$$

よって，　$P_1=\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^{-3}}{5\cdot3^7}=\boldsymbol{\dfrac{1}{729}}$，$P_2=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2^{-2}}{5\cdot3^8}=\boldsymbol{\dfrac{4}{729}}$，$P_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2^{-1}}{5\cdot3^9}=\boldsymbol{\dfrac{28}{2187}}$

(2)　$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{\dfrac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\cdot 2^{n-3}}{5\cdot 3^{n+7}}}{\dfrac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n\cdot 2^{n-4}}{5\cdot 3^{n+6}}}=\frac{2(n+5)}{3n}$$

よって　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1 \iff 2(n+5)>3n \iff n<10$

したがって，

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$のとき　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1 \iff P_{n+1}>P_n$

$n=10$のとき　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1 \iff P_{n+1}=P_n$

$n=11,\ 12,\ 13,\ \cdots\cdots$のとき　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1 \iff P_{n+1}<P_n$

であるから，

$$P_1<P_2<\cdots\cdots<P_9<P_{10}=P_{11}>P_{12}>P_{13}>\cdots\cdots$$

したがって，P_nが最大となるnは　$\boldsymbol{n=10,\ 11}$