解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2025年度　順天堂大学

【　講　評　】

例年通り，大問3題で出題された．大問1の小問集合が3題から4題と変更されたが，計算量や難易度はほぼ変化していない．また，大問3が記述式で証明を含む問題である点も変更がなかった．全体的に誘導が親切な問題が多く，計算量も少なかったため，解きやすくなった印象である．正規合格のためには70%以上の得点を目指したい．以下，大問ごとに特徴を述べる．

$\boxed{\text{I}}$　小問集合

(1)　数列（等比数列）／関数と極限（無限等比級数）／対数関数（常用対数）【やや易】

定積分に関する問題であった．誘導に従って計算していけばよい．(b)は(a)をヒントに計算するだけである．計算量も多くないため，ここは落とせない．

(2)　ベクトル（空間図形とベクトル）【標準】

空間内の点の存在範囲を考える問題であった．誘導に従って解き進めるだけである．存在範囲が平行四辺形になることが見抜けなかった人は復習しておこう．

(3)　高次方程式【標準】

高次方程式の解を誘導に従って式変形，置き換えを行って求める問題であった．やや計算が面倒であるが，確実に得点したい問題である．

(4)　集合と命題（必要・十分条件）【標準】

必要十分条件を判定させる典型問題で難易度も標準的であるが，順天堂大学で出題されたのは目新しかったため，面食らった受験生も多いのではないだろうか．

$\boxed{\text{II}}$　数Ⅱ微分法（接線）【標準】

3次関数のグラフと直線の位置関係から，3次関数を決定する問題であった．最初の設問が親切な誘導となっているので，以降も従って解き進めるだけである．例年の大問2と比較すると解きやすい問題であったため，この問題の出来不出来は合否に大きく影響するだろう．

$\boxed{\text{III}}$　数列（数学的帰納法）／数Ⅲ積分法（定積分と数列）【標準】

定積分を用いて無限級数（メルカトル級数）を求める問題であった．これまで多くの入試で出題されてきた典型問題であるため，一度は類題を解いたことがある受験生が多かったのではないだろうか．差がつきにくい問題であった．

【　解　答　】

$\boxed{\text{I}}$ (1)　ア : 6,　イ : 1,　ウ : 6,　エ : 1,　オ : 0,

(2)　ア : 1,　イ : 3,　ウ : 2,　エ : 3,　オ : 2,　カ : 3,　キ : 9,　ク : 1,　ケ : 2,　コ : 3,
サ : 3,　シ : 1,　ス : 1

(3)　ア : −,　イ : 1,　ウ : 4,　エ : 2,　オ : 5,　カ : 6,　キ : −,　ク : 7,　ケ : 5,　コ : 6,
サ : 1,　シ : 5,　ス : 2,　セ : 5,　ソ : 2,　タ : 2,　チ : 2,　ツ : 5,

(4)　(a)　ア : (C),　(b)　イ : (B),　(c)　ウ : (C),　(d)　エ : (A),

$\boxed{\text{II}}$ (a)　ア : 2,　イ : 1,　ウ : 4,　エ : −,　オ : 1,　カ : 2,　キ : 3,　ク : 2,　ケ : 9,　コ : −,　サ : 4,

(b)　シ : 3,　ス : −,　セ : 1,　ソ : 8,　タ : 3,　チ : 3,　ツ : −,　テ : 1,　ト : 2,

(c)　ナ : −,　ニ : 1,　ヌ : 8,　ネ : 3,　ノ : 8,　ハ : 4,　ヒ : 5,　フ : 8,　ヘ : 1,　ホ : 8,

$\boxed{\text{III}}$ (1)　$\dfrac{1}{2}\log 2$,　(2)(3)　解説参照

【　解　説　】

I　$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

(1)　一般項が $a_n = 2^{n+3}3^{-n}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，$a_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{ア}$ である．

また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{イウ}$ である．一般項が $b_n = a_1 \times a_2 \times \cdots\cdots \times a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ について，

$b_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{エオ}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(2)　四面体 OABC において，$\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 60°$，$OA = 9$，$OB = 3$，$OC = 6$ である．
点 P は辺 OA 上を，点 Q は辺 BC 上をそれぞれ独立に動く．このとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点を R とする．

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}$ $(0 \leqq s \leqq 1)$，$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とし，辺 OB を $2:1$ に内分する点を D とすると，

$$\overrightarrow{DR} = s\vec{k} + t\vec{l}\ ,\quad \vec{k} = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OA}\ ,\quad \vec{l} = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OC} - \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OB}$$

と表され，点 R はある平面上を動くことがわかる．この平面を H とすると，$|\vec{k}|^2 = \boxed{キ}$，$|\vec{l}|^2 = \boxed{クケ}$，

$\vec{k} \cdot \vec{l} = \boxed{コ}$ より，平面 H 上で点 R が描く図形の面積は $\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シス}}$ である．

(3)　4 次方程式 $P(x) = x^4 - 54x^2 - 40x + 269 = 0$ を考える．

$x = y + b$ とおいたとき，$P(y+b) = y^4 - 4y^3 - 48y^2 + 64y + 256$ となる定数 b の値は $b = \boxed{アイ}$ である．

さらに $y = ax$ とおいて，$P(az+b) = cz^4 - cz^3 + dz^2 + cz + c$ となるように定数 a を選ぶと $a = \boxed{ウ}$ であり，

このときの定数 c と d の値は $c = \boxed{エオカ}$，$d = \boxed{キクケコ}$ である．

方程式 $P(az+b) = 0$ において，$t = z - \dfrac{1}{z}$ とおくと $t = \dfrac{\boxed{サ} \pm \sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$ である．

方程式 $P(x) = 0$ の実数解のうちで最大のものは $x = \sqrt{\boxed{セ}} + \sqrt{\boxed{ソタ} + \boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}$ である．

(4)　次の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ に当てはまるものを，下の (A) ～ (D) から選べ．

(a)　実数 x について，$0 < |x+2| - |x-1| < 3$ は $-1 < x < 1$ であるための $\boxed{ア}$．

(b)　実数 x が有理数 a，b を用いて a^b と表せることは，x が有理数であるための $\boxed{イ}$．

(c)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することは，数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすための $\boxed{ウ}$．

(d)　m，n，l を整数とする．$m^2 + n^2 + l^2$ が奇数であることは，$m + n + l$ が奇数であるための $\boxed{エ}$．

(A)　必要十分条件である
(B)　必要条件であるが，十分条件ではない
(C)　十分条件であるが，必要条件ではない
(D)　必要条件でも十分条件でもない

解答

(1)　$a_n<1$ の両辺の常用対数をとると，

$$\log_{10}2^{n+3}3^{-n}<\log_{10}1 \iff (n+3)\log_{10}2-n\log_{10}3<0 \iff (\log_{10}3-\log_{10}2)n>3\log_{10}2$$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ より，

$$(0.4771-0.3010)n>3\cdot 0.3010 \iff 0.1761n>0.9030$$

$$\therefore\quad n>\frac{0.9030}{0.1761}=5.12\cdots$$

これを満たす最小の自然数 n は，　$n=6_{(ア)}$

また，$a_n=2^{n+3}3^{-n}=8\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は初項 $8\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の無限等比級数であり，$\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ であるから収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{16}{3}}{1-\frac{2}{3}}=16_{(イウ)}$$

次に，　$b_n=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\cdots\times a_n=8\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\cdot 8\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot 8\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot\cdots\cdots 8\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$$=8^n\left(\frac{2}{3}\right)^{1+2+3+\cdots\cdots+n}=8^n\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$=2^{\frac{1}{2}n(n+7)}\cdot 3^{-\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$b_n<1$ の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}2^{\frac{1}{2}n(n+7)}\cdot 3^{-\frac{1}{2}n(n+1)}<\log_{10}1$$

$$\frac{1}{2}n(n+7)\log_{10}2-\frac{1}{2}n(n+1)\log_{10}3<0$$

$n>0$ であるから

$$(n+7)\log_{10}2-(n+1)\log_{10}3<0$$

$$n(\log_{10}2-\log_{10}3)<-7\log_{10}2+\log_{10}3$$

$$\therefore\quad n>\frac{7\log_{10}2-\log_{10}3}{\log_{10}3-\log_{10}2}=\frac{7(0.3010)-0.4771}{0.4771-0.3010}=\frac{1.6299}{0.1761}=9.25\cdots\cdots$$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=10_{(エオ)}$

別解　b_n は常用対数をとることになるので，次のように計算してもよい．

$a_n=8\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=2^{n+3}\cdot 3^{-n}$ であるから，

$$\begin{aligned}\log_{10}b_n&=\log_{10}(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdots\cdot a_n)\\&=\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3+\cdots\cdots+\log_{10}a_n\\&=\sum_{k-1}^{n}\log_{10}a_k=\sum_{k=1}^{n}\log_{10}(2^{k+3}\cdot 3^{-k})\\&=\sum_{k=1}^{n}\{(k+3)\log_{10}2-k\log_{10}3\}\\&=\frac{(4\log_{10}2-\log_{10}3)+\{(n+3)\log_{10}2-n\log_{10}3\}}{2}\cdot n\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{3}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{s\vec{a}+2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}}{3}-\frac{2}{3}\vec{b}=s\cdot\frac{\vec{a}}{3}+t\cdot\frac{2\vec{c}-2\vec{b}}{3}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DR}}=s\vec{k}+t\vec{l}$ とすると，

$$\vec{k}=\frac{\vec{a}}{3}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}_{(アイ)},\ \vec{l}=\frac{2\vec{c}-2\vec{b}}{3}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}_{(オカ)}$$

したがって，点 R は点 D を通り $\vec{k}$ と $\vec{l}$ の両方に平行な平面 H 上を動き，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ から，この平面上で点 R が描く図形は，点 D を頂点の 1 つとし，$\vec{k}$ と $\vec{l}$ の作る平行四辺形の内部とその周上である．

$|\vec{a}|=9$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=6$ であり，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=9\cdot3\cdot\cos60^\circ=\frac{27}{2},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=3\cdot6\cdot\cos60^\circ=9,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=6\cdot9\cdot\cos60^\circ=27$$

であるから，

$$|\vec{k}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2=\frac{9^2}{9}=9_{(キ)},\quad |\vec{l}|^2=\left|\frac{2\vec{c}-2\vec{b}}{3}\right|^2=\frac{4}{9}|\vec{b}-\vec{c}|^2=\frac{4}{9}(9-18+36)=4(1-2+4)=12_{(クケ)}\ ,$$

$$\vec{k}\cdot\vec{l}=\frac{\vec{a}}{3}\cdot\frac{2\vec{c}-2\vec{b}}{3}=\frac{2}{9}\left(27-\frac{27}{2}\right)=3_{(コ)}$$

よって，求める面積は，$\sqrt{|\vec{k}|^2|\vec{l}|^2-(\vec{k}\cdot\vec{l})^2}=\sqrt{9\cdot12-3^2}=3\sqrt{3\cdot4-1}=3\sqrt{11}_{(サシス)}$

(3) y についての恒等式

$$P(y+b)=(y+b)^4-54(y+b)^2-40(y+b)+269=y^4-4y^3-48y^2+64y+256 \quad \cdots\cdots③$$

が成立するので，$y=-b$ を代入すると，

$$269=b^4+4b^3-48b^2-64b+256 \iff b^4+4b^3-48b^2-64b-13=0$$

$b=-1_{(アイ)}$ はこれを満たし，このとき確かに ③ は y についての恒等式となる．

$y=az$ とおくと，z についての恒等式

$$P(az+b)=a^4z^4-4a^3z^3-48a^2z^2+64az+256=cz^4-cz^3+dz^2+cz+c$$

が成立するので，係数を比較して，$\begin{cases} a^4=c \\ -4a^3=-c \\ -48a^2=d \\ 64a=c \\ 256=c \end{cases}$ $\cdots④$

$a=4_{(ウ)}$，$c=256_{(エオカ)}$，$d=-48\cdot16=-768_{(キクケコ)}$ は ④ の全式を満たす．以上から，

$$P(az+b)=0 \iff z^4-z^3+\frac{d}{c}z^2+z+1=0 \iff z^4-z^3-3z^2+z+1=0$$

明らかに $z\fallingdotseq 0$ より，両辺を z^2 で割ると，$z^2+\frac{1}{z^2}-\left(z-\frac{1}{z}\right)-3=0$

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+2-\left(z-\frac{1}{z}\right)-3=0 \qquad \therefore\ \left(z-\frac{1}{z}\right)^2-\left(z-\frac{1}{z}\right)-1=0$$

$t=z-\frac{1}{z}$ とおくと，$t^2-t-1=0 \quad \therefore\ t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}_{(サシス)}$

このとき，$z-\frac{1}{z}=t \iff z^2-tz-1=0 \quad \therefore\ z=\frac{t\pm\sqrt{t^2+4}}{2}=\frac{t\pm\sqrt{t+5}}{2} \quad (\because\ t^2=t+1)$

また，　$x=y-1=4z-1=2(t\pm\sqrt{t+5})-1$

よって，$t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき　$x=2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+5}\right)-1=\sqrt{5}\pm\sqrt{22+2\sqrt{5}}$

$t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ のとき　$x=2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+5}\right)-1=-\sqrt{5}\pm\sqrt{22-2\sqrt{5}}$

したがって，$P(x)=0$ の実数解のうちで最大のものは　$x=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$ (セソタチツ)

(4)(a)　$0<|x+2|-|x-1|<3$ について，

$x<-2$ のとき，　$0<-(x+2)+(x-1)<3$　これを満たす実数 x は存在しない.

$x>1$ のとき，　$0<(x+2)-(x-1)<3$　これを満たす実数 x は存在しない.

$-2\leqq x\leqq 1$ のとき，　$0<(x+2)+(x-1)<3 \iff 0<2x+1<3 \iff -\dfrac{1}{2}<x<1$

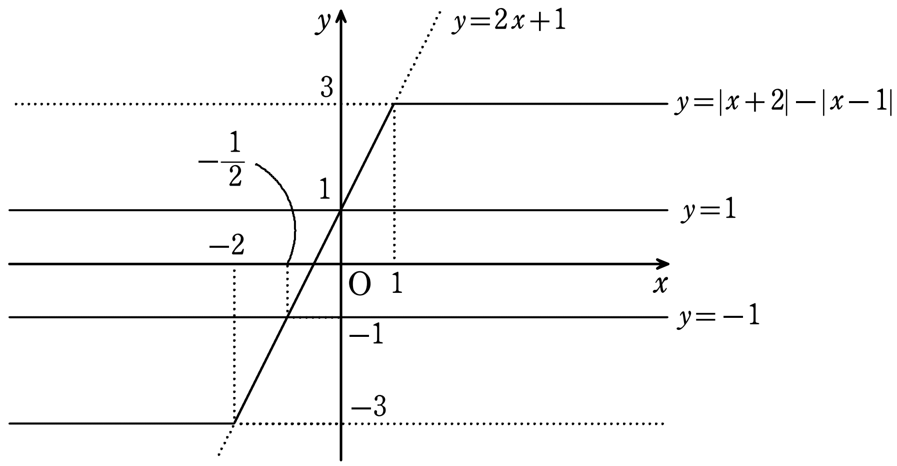
よって，実数 x について　$0<|x+2|-|x-1|<3 \iff -\dfrac{1}{2}<x<1$

したがって，$0<|x+2|-|x-1|<3 \implies -1<x<1$ は真であり，$-1<x<1 \implies 0<|x+2|-|x-1|<3$ はたとえば $x=-\dfrac{3}{4}$ のとき成立しないため偽である.

以上より，$0<|x+2|-|x-1|<3$ は $-1<x<1$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない.　(C)(ア)

別解　グラフを図示して考えてもよいだろう.

$y=|x+2|-|x-1|=\begin{cases}-3 & (x<-2)\\ 2x+1 & (-2\leqq x<1)\\ 3 & (1\leqq x)\end{cases}$ のグラフは次のようになる.



よって　$0<|x+2|-|x-1|<3 \iff -\dfrac{1}{2}<x<1$　であるから，

$0<|x+2|-|x-1|<3 \implies -1<x<1$ は真，$-1<x<1 \implies 0<|x+2|-|x-1|<3$ は偽

であるため，$0<|x+2|-|x-1|<3$ は $-1<x<1$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない.　(C)(ア)

(b)　$a=2$，$b=\dfrac{1}{2}$ のとき，$x=a^b=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ は有理数でないから，

実数 x が有理数 a，b を用いて a^b と表せる　$\Longrightarrow$　x は有理数　は偽である．

また，x が有理数のとき，有理数 $a=x$，$b=1$ を用いて $x=a^b$ と表せるから，

x は有理数　$\Longrightarrow$　実数 x が有理数 a，b を用いて a^b と表せるは真である．

よって，実数 x が有理数 a，b を用いて a^b と表せることは，x は有理数であるための必要条件であるが，十分条件ではない．　(B)(イ)

(c)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$ とすると，$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)=\alpha-\alpha=0$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する　$\Longrightarrow$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$　は真である．

また，$a_n=\log\dfrac{n+1}{n}=\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=1$ であるが，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{\log(n+1)-\log n\}=\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$$

であるから，これが反例となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$　$\Longrightarrow$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する　は偽であることがわかる．

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない．　(C)(ウ)

(d)　以下の合同式は 2 を法とする．る．　(A)(ア)

$m+n+l\equiv 1$　$\Leftrightarrow$　$(m,\ n,\ l)\equiv(0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1)$

$\Leftrightarrow$　$m^2+n^2+l^2=1$

よって，$m^2+n^2+l^2$ が奇数であることは，$m+n+l$ が奇数であるための必要十分条件である．

Ⅱ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a \fallingdotseq 0)$ について，以下の(a)，(b)，(c) それぞれの場合における定数 a，b，c，d の値を求めよ.

(a) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件（ⅰ），（ⅱ）を満たす.

条件（ⅰ）: $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=6x$ と 3 個の共有点 $(-2,\ -12)$，$(1,\ 6)$，$(4,\ 2)$ を持つ.

条件（ⅱ）: $f(x)$ の $x=-2$ における微分係数が -3 である.

このとき，条件（ⅰ）より $f(x)-6x=a\left(x+\boxed{ア}\right)\left(x-\boxed{イ}\right)\left(x-\boxed{ウ}\right)$ となる．ただし，

$\boxed{イ}<\boxed{ウ}$ である．さらに，条件（ⅱ）を考慮して $a=\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$，$b=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$，$c=\boxed{ケ}$，$d=\boxed{コサ}$

を得る.

(b) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件（ⅰ），（ⅱ）を満たす.

条件（ⅰ）: $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=6x$ と点 $(1,\ 6)$ で接し，かつ共有点 $(4,\ 24)$ を持つ.

条件（ⅱ）: $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=6x-12$ と接する.

このとき，$a=\boxed{シ}$，$b=\boxed{スセソ}$，$c=\boxed{タチ}$，$d=\boxed{ツテト}$ である.

(c) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件（ⅰ），（ⅱ）を満たす.

条件（ⅰ）: $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=6x$ と点 $(1,\ 6)$ で接し，他に共有点はない.

条件（ⅱ）: $f(x)$ は $x=-3$ で極値をとる.

このとき，$a=\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}$，$b=\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$，$c=\dfrac{\boxed{ハヒ}}{\boxed{フ}}$，$d=\dfrac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}$ である.

解答

(a) 条件（ⅰ）より

$y=f(x)$ のグラフと $y=6x$ が $x=-2,\ 1,\ 4$ で交わる

$\Leftrightarrow$ 3 次方程式 $f(x)=6x$ が $x=-2,\ 1,\ 4$ を解にもつ

であるから，恒等式

$$f(x)-6x=a(x+\mathbf{2})(x-\mathbf{1})(x-\mathbf{4})_{(アイウ)}$$

が成立する．この両辺を x で微分すると，

$$f'(x)-6=a\{(x-1)(x-4)+(x+2)(x-4)+(x+2)(x-1)\}$$

条件（ⅱ）より $f'(-2)=-3$ であるから

$$-3-6=a\{(-3)\cdot(-6)+0+0\} \qquad \therefore\ a=\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}_{(エオカ)}$$

$f(x)-6x=0 \Leftrightarrow ax^3+bx^2+(c-6)x+d=0$ が $x=-2,\ 1,\ 4$ を解に持つから解と係数の関係より，

$$\begin{cases} -2+1+4=-\dfrac{b}{a} \\ -2\cdot1+1\cdot4+4\cdot(-2)=\dfrac{c-6}{a} \\ -2\cdot1\cdot4=-\dfrac{d}{a} \end{cases} \qquad \therefore\ b=-3a=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}_{(キク)},\ c=6-6a=\mathbf{9}_{(ケ)},\ d=8a=\mathbf{-4}_{(コサ)}$$

(b)　条件（ⅰ）より

$y=f(x)$ のグラフと $y=6x$ が $x=1$ で接し，$x=4$ で交わる

$\Leftrightarrow$　3 次方程式 $f(x)=6x$ が $x=1$ を重解，$x=4$ を解にもつ

であるから，恒等式

$$f(x)-6x=a(x-1)^2(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=a(x-1)^2(x-4)+6x$$

が成立し，

$$f'(x)=2a(x-1)(x-4)+a(x-1)^2+6$$

条件（ⅱ）の接点の x 座標を $t\ (\neq 1)$ すると，

$$\begin{cases} f'(t)=6 \\ f(t)=6t-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\{2(t-1)(t-4)+(t-1)^2\}+6=6 & \cdots\cdots ① \\ a(t-1)^2(t-4)+6t=6t-12 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$a\neq 0$，$t\neq 1$ であるから，① より　$2(t-4)+(t-1)=0$　　$\therefore$　$t=3$

これを ② に代入すると，　$a\cdot 2^2\cdot(-1)=-12$　　$\therefore$　$a=3_{(シ)}$

$f(x)-6x=0 \Leftrightarrow ax^3+bx^2+(c-6)x+d=0$　が $x=1$，1，4 を解に持つことから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} 1+1+4=-\dfrac{b}{a} \\ 1\cdot 1+1\cdot 4+4\cdot 1=\dfrac{c-6}{a} \\ 1\cdot 1\cdot 4=-\dfrac{d}{a} \end{cases} \quad \therefore \quad b=-6a=-18_{(スセソ)},\ c=6+9a=33_{(タチ)},\ d=-4a=-12_{(ツテト)}$$

(c)　条件（ⅰ）より

$y=f(x)$ と $y=6x$ が $x=1$ で接し，他に共有点はない

$\Leftrightarrow$　3 次方程式 $f(x)=6x$ が $x=1$ を 3 重解にもつ

であるから，恒等式

$$f(x)-6x=a(x-1)^3$$

が成立する．この両辺を x で微分すると，

$$f'(x)-6=3a(x-1)^2$$

条件（ⅱ）より $f'(-3)=0$ が必要であることを用いると，

$$0-6=3a\cdot 4^2 \quad \therefore \quad a=\frac{-1}{8}_{(ナニ)}$$

$f(x)-6x=0 \Leftrightarrow ax^3+bx^2+(c-6)x+d=0$　が $x=1$，1，1 を解に持つことから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} 1+1+1=-\dfrac{b}{a} \\ 1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1=\dfrac{c-6}{a} \\ 1\cdot 1\cdot 1=-\dfrac{d}{a} \end{cases} \quad \therefore \quad b=-3a=\frac{3}{8}_{(ネノ)},\ c=6+3a=\frac{45}{8}_{(ハヒフ)},\ d=-a=\frac{1}{8}_{(ヘホ)}$$

また，このとき $f(x)=-\dfrac{1}{8}x^3+\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{45}{8}x+\dfrac{1}{8}$ であり，

$$f'(x)=\frac{3}{8}(-x^2+2x+15)=-\frac{3}{8}(x^2-2x-15)=-\frac{3}{8}(x+3)(x-5)$$

となるから，確かに $x=-3$ の前後で $f'(x)$ は符号変化する．

別解　(b)は3次関数のグラフが変曲点に関して対称であることを用いると，次のように解くことができる.

条件(ｉ)より

　　$y=f(x)$ のグラフと $y=6x$ が $x=1$ で接し，$x=4$ で交わる

$\Leftrightarrow$　3次方程式 $f(x)=6x$ が $x=1$ を重解，$x=4$ を解にもつ

であるから，恒等式

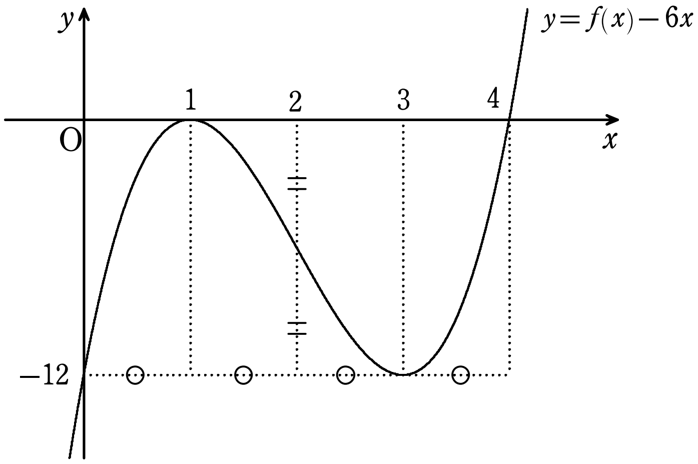
$$f(x)-6x=a(x-1)^2(x-4) \quad \cdots\cdots ③$$

が成立する．また，条件(ⅱ)より

　　$y=f(x)$ のグラフは $y=6x-12$ と接する

$\Leftrightarrow$　$y=f(x)-6x$ のグラフは $y=-12$ と接する

であるから，$y=f(x)-6x$ のグラフは次の図のようになる.



よって，$y=f(x)-6x$ は $x=3$ において極小値 -12 をとるから

$$f(3)-6\cdot 3=a(3-1)^2(3-4)=-12$$

$$-4a=-12 \qquad \therefore \quad a=3$$

したがって　$f(x)-6x=3(x-1)^2(x-4)$　$\Leftrightarrow$　$f(x)=3x^3-18x^2+33x-12$　であるから

$$b=-6a=-18_{(スセソ)},\ c=6+9a=33_{(タチ)},\ d=-4a=-12_{(ツテト)}$$

III 0以上の整数nに対して

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+1}x\,dx$$

とする.

(1) I_0を求めよ.

(2) $n\geqq 1$ のとき $I_n=(-1)^n\left(I_0+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right)$ が成り立つことを数学的帰納法によって示せ.

(3) $\log 2=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}$ を示せ．ただし，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$0\leqq\tan x\leqq\frac{4}{\pi}x$ が成り立つことを用いてよい.

解答

(1) $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\log 1=\frac{\log 2}{2}$

(2) $I_n=(-1)^n\left(I_0+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right)$ ……①

(I) $n=1$ のとき,

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan x\,dx=\left[\frac{\tan^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\frac{1}{2}-I_0$$

より，①は成り立つ.

(II) $n=k$ (kは自然数)のとき，①が成り立つと仮定すると,

$$I_k=(-1)^k\left(I_0+\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m}\right)\quad\cdots\cdots②$$

このとき,

$$\begin{aligned}I_{k+1}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2k+3}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan^{2k+1}x\,dx\\&=\left[\frac{\tan^{2k+2}x}{2k+2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2k+1}x\,dx\\&=\frac{1}{2k+2}-I_k=\frac{1}{2k+2}-(-1)^k\left(I_0+\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m}\right)\quad(\because\ ②)\\&=\frac{(-1)^{2k+2}}{2k+2}+(-1)^{k+1}\left(I_0+\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{2m}}{2m}\right)=(-1)^{k+1}\left(I_0+\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m}+\frac{(-1)^{k+1}}{2k+2}\right)\\&=(-1)^{k+1}\left(I_0+\sum_{m=1}^{k+1}\frac{(-1)^{2m}}{2m}\right)\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも成り立つ.

(I), (II)より，数学的帰納法によって，①はすべての自然数nについて成り立つ.　(証明終)

(3) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，　$0\leqq\tan x\leqq\frac{4}{\pi}x$

各辺を$2n+1$乗すると，　$0\leqq\tan^{2n+1}x\leqq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1}x^{2n+1}$

これは$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ で成立するので，各辺この範囲で定積分すると,

$$0 \leqq I_n \leqq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n+1}dx = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1}\left[\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2n+2}$$

ここで，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2n+2}=0$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$

したがって，(1) と (2) の ① より

$$\lim_{n\to\infty}|I_n| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\left(I_0+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|I_0+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right| = 0$$

$$\therefore\quad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{m} = -2I_0 = -\log 2$$　　(証明終)