解答速報　数学

2025年度　日本医科大学（前期）

【　講　評　】

例年通り，大問4題で出題された．出題形式にも変化はなかった．全体的に方針の立てやすい問題が多く，例年に比べて計算量もあまり多くなかったため，比較的得点しやすかったであろう．全体で55％～60％が得点できれば1次試験合格を勝ち取れる可能性が高いだろう．以下，大問ごとに特徴を述べる．

［Ⅰ］ 場合の数・確率（確率の最大･最小）／複素数平面（極形式）　／整数の性質（1次不定方程式）【やや易】

問1は反復試行の確率を求め，それに対応する複素数を極形式の計算により求めるだけである．問2は問1で求めた確率が最大となるときを考える典型問題である．問3は問1で求めた複素数が純虚数になるときを考えると1次不定方程式が導けるので，これを満たす整数解を数えるだけである．全体の難易度を考えると，この大問は完答したい．

［Ⅱ］ ベクトル（空間図形とベクトル）【標準】】

四面体に関する空間ベクトルの問題であった．問1は内積の計算，問2は頂点から底面へ下ろした垂線の足へのベクトル，問3は底面の内心のベクトルを求めるといった，いずれも典型的な問題であるため，ここまでは確実に得点したい．問4は三角形の面積を直接求めると面倒であるため，面積比を利用できたかどうかがポイントとなる．

［Ⅲ］ ベクトル（空間座標）／数学Ⅲ微分法【標準】

問1はベクトル方程式で表された曲面の断面を考察する問題であり，この手の問題に慣れた人でないと解きづらい．たとえ問1ができなくても，問2，問3を解くことはできることに気づきたい．また，問4は問1～問3が誘導となっていることに気づければ解けるが，やや解きづらい問題であるため，ここは出来なくても問題ないだろう．

［Ⅳ］ 数学Ⅲ微分法（関数方程式）／数学Ⅲ積分法（定積分計算）【標準】

問1は偶関数，奇関数であることを示すだけであるから落とせない．問2は類題を解いた経験があるかどうかで出来が大きく分かれたであろう．問3は原始関数を求めるだけであり，問4はその関数の定積分であるから，問2ができなくても諦めずに解き切れたかどうかがポイントとなる．

【 解 答 】

［Ⅰ］

問1　アイ：${}_nC_k\dfrac{2^k}{3^n}$，　ウエオカキ：$2^{\frac{2k-n}{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{3k-n}{4}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3k-n}{4}\pi\right)\right\}$

問2　ク：1350

問3　ケ：507

［Ⅱ］

問1　ア：$\dfrac{1}{2}$，　イ：$\dfrac{1}{2}$，　ウ：0

問2　エオカ：$\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

問3　キクケ：$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\vec{a}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\vec{b}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\vec{c}$

問4　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$（解説参照）

［Ⅲ］

問1　アイ：$(k,\ 0,\ 0)$，　ウ：$\sqrt{\dfrac{k}{2}}$

問2　エ：5

問3　オカキ：$(1,\ 5,\ 0)$

問4　クケコ：$\left(2,\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，　サ：$\sqrt{17}$

［Ⅳ］

問1　（解説参照）

問2　(1)　$f'(x)=-f(x)g(x)$（解説参照）　(2)　$\log\dfrac{2(1+e^x)}{3+\cos x}$　(3)　$\dfrac{3+\cos x}{1+e^x}$

問4　3π

【　解　説　】

［Ⅰ］

問１　4以下の目が出る確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，5または6の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ であるから，求める確率は

$$P_{n,k}={}_nC_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}={}_nC_k\frac{2^k}{3^k}\cdot\frac{1}{3^{n-k}}={}_nC_k\frac{2^k}{3^n}{}_{(アイ)}$$

また，

$$z_n=z_0\cdot(\sqrt{2}i)^k\cdot\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-k}=1\cdot\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right\}^k\cdot\frac{1}{\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{n-k}}$$

$$=(\sqrt{2})^k\left(\cos\frac{k}{2}\pi+i\sin\frac{k}{2}\pi\right)\cdot(\sqrt{2})^{k-n}\left(\cos\frac{k-n}{4}\pi+i\sin\frac{k-n}{4}\pi\right)$$

$$=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2k-n}\left\{\cos\left(\frac{k}{2}+\frac{k-n}{4}\right)\pi+i\sin\left(\frac{k}{2}+\frac{k-n}{4}\right)\pi\right\}$$

$$=2^{\frac{2k-n}{2}}\left\{\cos\left(\frac{3k-n}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3k-n}{4}\pi\right)\right\}_{(ウエオカキ)}$$

問２　問1より，$P_{2025,\,k}={}_{2025}C_k\frac{2^k}{3^{2025}}=a_k\ (>0)$ とおくと，

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{{}_{2025}C_{k+1}\frac{2^{k+1}}{3^{2025}}}{{}_{2025}C_k\frac{2^k}{3^{2025}}}=\frac{\frac{2025!}{(2024-k)!(k+1)!}\cdot 2}{\frac{2025!}{(2025-k)!k!}}=\frac{2(2025-k)}{k+1}$$

であるから

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}>1\iff\frac{2(2025-k)}{k+1}>1\iff 4050-2k>k+1\qquad\therefore\ k<\frac{4049}{3}=1349.666\cdots$$

よって，$0\leqq k\leqq 1349$ のとき $a_{k+1}>a_k$，$1350\leqq k$ のとき $a_k>a_{k+1}$ であるから，

$$a_0<a_1<a_2<a_3<\cdots\cdots<a_{1349}<a_{1350}>a_{1351}>a_{1352}>\cdots\cdots$$

したがって，$a_k=P_{2025,\,k}$ は $k=\mathbf{1350}_{(ク)}$ のとき，最大値をとる．

問３　問1より，$z_{2025,\,k}$ が純虚数となるのは，l を整数として，

$$\frac{3k-2025}{4}\pi=\frac{\pi}{2}+l\pi\iff 3k-2025=2+4l\qquad\therefore\ 3k-4l=2027\quad\cdots\cdots①$$

が成立するときである．

① を満たすものの1つは　$3\cdot1-4\cdot(-506)=2027$　……②

①−② より　$3(k-1)-4(l+506)=0$

3と4は互いに素であるから，整数 m を用いて次のように表せる．

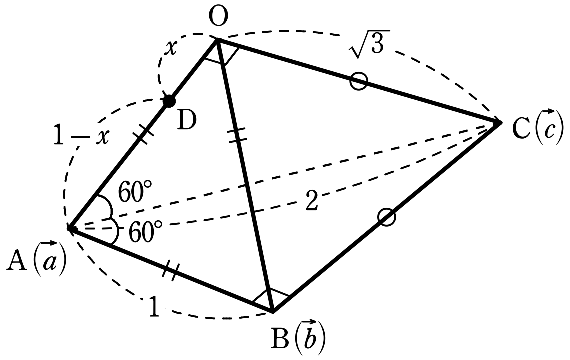
$$\begin{cases}k-1=4m\\ l+506=3m\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}k=4m+1\quad\cdots\cdots③\\ l=3m-506\end{cases}$$

$0\leqq k\leqq 2025$ より，$0\leqq 4m+1\leqq 2025$　　$\therefore\ -\frac{1}{4}\leqq m\leqq 506$

これを満たす整数 m の個数は　$506-0+1=507$

③ より異なる m に異なる k が対応するから，求める k の個数は　$\mathbf{507}_{(ケ)}$

［Ⅱ］



問１　OA＝OB＝AB＝1 より △OAB は正三角形であり，OA＝1，OC＝$\sqrt{3}$，AC＝2 より，△OAC は∠AOC＝90° の直角三角形であるから，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\mathbf{\frac{1}{2}}_{\text{(ア)}}\quad,\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=\mathbf{0}_{\text{(ウ)}}$$

また，△OBC に余弦定理を用いると

$$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-2|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle BOC$$

$$3=1+3-2\vec{b}\cdot\vec{c}\qquad\therefore\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\mathbf{\frac{1}{2}}_{\text{(イ)}}$$

問２　点 H は平面 ABC 上の点であるから，実数 s，t を用いて，

$$\overrightarrow{OH}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

と表せる．$\overrightarrow{OH}\perp$ 平面 ABC より，

$$\begin{cases}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\iff\begin{cases}\overrightarrow{OH}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0\\ \overrightarrow{OH}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0\end{cases}$$

問 1 より，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから，

$$\begin{cases}\frac{1-s-t}{2}+s+\frac{t}{2}-1+s+t-\frac{s}{2}=0\\ \frac{s}{2}+3t-1+s+t-\frac{s}{2}=0\end{cases}\iff\begin{cases}s+t=\frac{1}{2}\\ s+4t=1\end{cases}$$

これを解くと　$s=\frac{1}{3}$，$t=\frac{1}{6}$

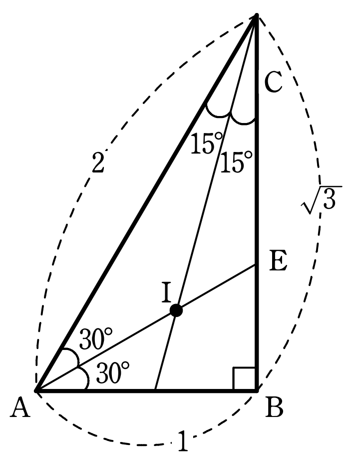
以上から，　$\overrightarrow{OH}=\mathbf{\frac{1}{2}}\vec{a}+\mathbf{\frac{1}{3}}\vec{b}+\mathbf{\frac{1}{6}}\vec{c}_{\text{(エオカ)}}$

問３　三角形の内心は内角の二等分線の交点であるから，AI と BCの交点を E として，△ABC に注目して内角の二等分線定理を用いると，

$$CE=\sqrt{3}\cdot\frac{2}{2+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

また，△AEC に注目して内角の二等分線定理を用いると，

$$AI:IE=2:CE=2:\frac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}:1$$



よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1+2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots①$$

この始点をOに揃えることで，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OI}}=\left(1-\frac{3-\sqrt{3}}{3}-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\vec{a}+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\vec{b}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\vec{c}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\mathbf{2}}\vec{a}+\frac{3-\sqrt{3}}{\mathbf{3}}\vec{b}+\frac{3-\sqrt{3}}{\mathbf{6}}\vec{c}_{(\text{キクケ})}$$

参考

一般に，△ABCの辺の長さを BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ としたとき，内心Iの位置ベクトルは，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$$

となる．これを公式として暗記しておけば，問3の結果は $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{\sqrt{3}\,\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{3}+2+1}$ と瞬時に求められる．

問4　問2の結果から，

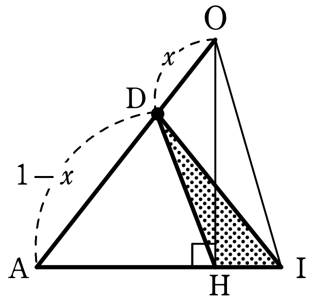
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{\mathrm{AO}})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})+\frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，問3から $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=(3-\sqrt{3})\overrightarrow{\mathrm{AH}}\quad\cdots\cdots③$$

であり，3点A，H，Iは同一直線上である．



よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ であるから，△DHIの面積は，

$$S=\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{OA}}\triangle\mathrm{OHI}=(1-x)\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\overrightarrow{\mathrm{HI}}|$$

問2より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{6}(3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\frac{1}{6^2}\left(9\cdot1+4\cdot1+3+12\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}+6\cdot0\right)=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

また，問2，問3より

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\vec{a}+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\vec{b}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\vec{c}-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}-2}{2}\vec{a}+\frac{2-\sqrt{3}}{3}\vec{b}+\frac{2-\sqrt{3}}{6}\vec{c}$$
$$=\frac{2-\sqrt{3}}{6}(-3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$$

であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{HI}}|^2=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{6}\right)^2\left(9\cdot1+4\cdot1+3-12\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}-6\cdot0\right)=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{6}\right)^2\cdot12$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{HI}}|=\frac{2-\sqrt{3}}{6}\sqrt{12}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

したがって，$S=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$ のとき

$$\frac{1}{2}(1-x)\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{3}=\frac{\sqrt{2}}{24}$$

$$1-x=\frac{1}{4(2-\sqrt{3})}\qquad\therefore\quad x=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}=\mathbf{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

[Ⅲ]

問1　実数 p，q を用いて，$\mathrm{P}(2p^2,\ p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(2q^2,\ 0,\ q)$ と表せる．$\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ について，

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，　$(x,\ y,\ z)=(2p^2,\ p,\ 0)+(2q^2,\ 0,\ q)=(2p^2+2q^2,\ p,\ q)$　$\therefore\ \begin{cases} x=2p^2+2q^2 \\ y=p \\ z=q \end{cases}$

これらから p，q を消去すると，　$S: x=2y^2+2z^2$　……①

正の定数 k に対して $x=k$ のとき，①から　$2y^2+2z^2=k \iff y^2+z^2=\dfrac{k}{2}$

よって，求める共通部分は，$(k,\ \mathbf{0}_{(ア)},\ \mathbf{0}_{(イ)})$ を中心とし，半径 $\sqrt{\dfrac{k}{2}}_{(ウ)}$ の円となる．

問2　$\mathrm{A}(1,\ 3,\ 4)$ より，線分 AH は平面 $x=1$ 上にあるから，　$\mathrm{H}(1,0,0)$

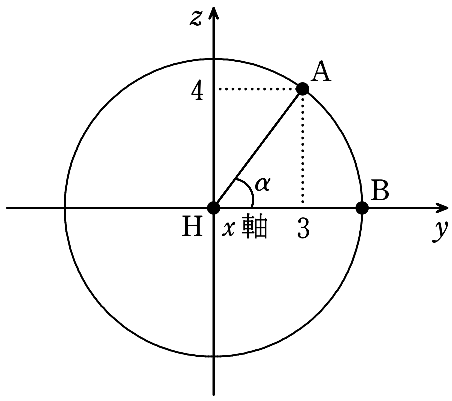
よって，線分 AH の長さは，　$\mathrm{AH}=\sqrt{3^2+4^2}=\mathbf{5}_{(エ)}$

問3　平面 $x=1$ に注目する．

$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，点 B は右図のように，

点 H のまわりに点 A を $-\alpha$ 回転させた点であるから，

　　$\mathrm{B}(\mathbf{1},\ \mathbf{5},\ \mathbf{0})_{(オカキ)}$



問4　S は x 軸に関して対称な曲面であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|$ である．

よって，まずは $|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|$ が最小となるときの曲面 S 上の点 Y について考える．

Y が平面 $x=k$ 上にあるとき，問1より $\mathrm{Y}\left(k,\ \sqrt{\dfrac{k}{2}}\cos\theta,\ \sqrt{\dfrac{k}{2}}\sin\theta\right)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BY}}=\left(k-1,\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cos\theta-5,\ \sqrt{\frac{k}{2}}\sin\theta\right)$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|^2&=(k-1)^2+\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cos\theta-5\right)^2+\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\sin\theta\right)^2\\&=k^2-2k+1+\frac{k}{2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-10\sqrt{\frac{k}{2}}+25\\&=k^2-\frac{3}{2}k+26-10\sqrt{\frac{k}{2}}\cos\theta\end{aligned}$$

k を固定し θ を $0\leqq\theta<2\pi$ で変化させると，$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|^2$ が最小となるのは $\cos\theta=1$，すなわち $\theta=0$ のときで，その最小値は

$$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|^2=k^2-\frac{3}{2}k-10\sqrt{\frac{k}{2}}+26$$

次に k を変化させたときの最小値を考える．

$\sqrt{\dfrac{k}{2}}=s$ とおくと $k=2s^2$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|^2=(2s^2)^2-\frac{3}{2}(2s^2)-10s+26=4s^4-3s^2-10s+26$$

このとき $k\geqq0$ より $s\geqq0$ である．

これを $f(s)$ とおくと，

$$f'(s)=16s^3-6s-10=2(8s^3-3s-5)=2(s-1)(8s^2+8s+5)$$

$s\geqq 0$ より $8s^2+8s+5>0$ であるから，$f(s)$ の $s\geqq 0$ における増減は次のようになる．

s	0		1	
$f'(s)$		$-$	0	$+$
$f(s)$		↘		↗

よって，$f(s)$ が最小となるのは $s=1$ のときで，最小値は　$f(1)=4-3-10+26=17$

$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|\geqq 0$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|^2$ が最小のとき $|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|$ も最小であり，その最小値は　$\sqrt{17}$

また，$s=1$ のとき $k=2$ であるから，これと $\theta=0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|$ が最小となるときの Y の座標は　$(2,\ 1,\ 0)$

この点を，点 B が点 A に重なるように x 軸の周りに回転移動させた点が $|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$ が最小となるときの点 X であるから，

その座標は，問 3 の α を用いて　　$\mathrm{X}(2,\ \cos\alpha,\ \sin\alpha)$　　$\therefore$　$\mathrm{X}\left(2,\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

別解　$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|$ の最小値は，次のように求めることもできる．

点 B は xy 平面上の点であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|$ が最小となるのは Y が xy 平面上の第 1 象限にあるときである．

以下，xy 平面上について注目し，$\mathrm{Y}(2t^2,\ t,\ 0)\ (t>0)$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{BY}}=(2t^2-1,\ t-5,\ 0)$$

$\dfrac{dx}{dy}=4y$ であるから，Y における接線の方向ベクトルの 1 つは

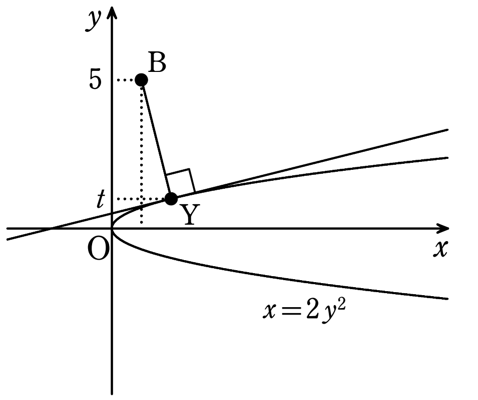
$\vec{v}=(4t,\ t,\ 0)=t(4,\ 1,\ 0)$ である．

$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|$ が最小となるのは，$\overrightarrow{\mathrm{BY}}\perp\vec{u}$ のときであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BY}}\cdot\vec{v}=0$$

$$(2t^2-1,\ t-5,\ 0)\cdot(4,\ 1,\ 0)=0$$

$$8t^2+t-9=0 \qquad \therefore\ (t-1)(8t+9)=0$$



$t>0$ より　$t=1$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{BY}}=(1,\ -4,\ 0)$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{BY}}|$ の最小値は　$\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$

$\mathrm{Y}(2,\ 1,\ 0)$ であるから，この点を点 B が点 A に重なるように x 軸の周りに回転移動させた点が $|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$ が最小となる

ときの点 X であり，その座標は，問 3 の α を用いて　　$\mathrm{X}(2,\ \cos\alpha,\ \sin\alpha)$　　$\therefore$　$\mathrm{X}\left(2,\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

[Ⅳ]

問１　$b(-x)=\dfrac{1}{2}\{a(-x)+a(x)\}=b(x)$　より $b(x)$ は x の偶関数，

$c(-x)=\dfrac{1}{2}\{a(-x)-a(x)\}=-c(x)$　より $c(x)$ は x の奇関数である．　　(証明終)

問２　(1)　条件(ⅱ)より，　$f(x+h)-f(x)=-\displaystyle\int_x^{x+h} g(t)f(t)\,dt$　であり，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{1}{h}\int_x^{x+h} g(t)f(t)\,dt\right\}$$

ここで，積分定数 C_1 を用いて $\displaystyle\int g(t)f(t)dt=H(t)+C_1$ とおくと，$g(t)f(t)$ が連続であることから，x を含む区間でこのような $H(t)$ は存在し，$H(x)$ は微分可能であるから

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{H(x+h)-H(x)}{h}\right\}=-H'(x)=\boldsymbol{-f(x)g(x)}$$

よって，$f(x)$ は微分可能である．　　(証明終)

(2)　積分定数 C_2 を用いて，

$$G(x)=\int g(x)\,dx=\int\left(\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{\sin x}{3+\cos x}\right)dx=\log|1+e^x|-\log|3+\cos x|+C_2$$
$$=\log\frac{1+e^x}{3+\cos x}+C_2$$

$G(0)=0$ より，　$\log\dfrac{2}{4}+C_2=0$　　$\therefore$　$C_2=\log 2$

以上から，　$G(x)=\log\dfrac{1+e^x}{3+\cos x}+\log 2=\boldsymbol{\log\dfrac{2(1+e^x)}{3+\cos x}}$

(3)　$h(x)=e^{G(x)}f(x)$ より，

$$h'(x)=g(x)e^{G(x)}f(x)+e^{G(x)}f'(x)=e^{G(x)}\{f(x)g(x)+f'(x)\}=0\qquad(\because\ (1))$$

よって，$h(x)$ は定数であるから $h(x)=k$ とおける．

条件(ⅰ)と $G(0)=0$ を用いると，　$k=h(0)=e^{G(0)}f(0)=2^0\cdot 2=2$

したがって，$h(x)=2$ であるから　$2=e^{G(x)}f(x)$

(2)の結果を用いると　$f(x)=\dfrac{2}{e^{G(x)}}=\dfrac{2}{\dfrac{2(1+e^x)}{3+\cos x}}=\boldsymbol{\dfrac{3+\cos x}{1+e^x}}$

問３　問２より，　$I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3+\cos x}{1+e^x}dx$　……①

$t=-x$ と置換すると，

$$I=\int_{\pi}^{-\pi}\frac{3+\cos(-t)}{1+e^{-t}}(-dt)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3+\cos t}{1+e^{-t}}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(3+\cos t)e^t}{e^t+1}dt$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(3+\cos x)e^x}{1+e^x}dx\quad\cdots②$$

①+②より，

$$2I=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{3+\cos x}{1+e^{x}}+\frac{(3+\cos x)e^{x}}{1+e^{x}}\right\}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(3+\cos x)(1+e^{x})}{1+e^{x}}dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}(3+\cos x)dx$$

$3+\cos x$ は偶関数であるから，　$2I=2\int_{0}^{\pi}(3+\cos x)dx$

$$\therefore\quad I=\int_{0}^{\pi}(3+\cos x)dx=\Big[3x+\sin x\Big]_{0}^{\pi}=\boldsymbol{3\pi}$$

別解　問 3 は問 1 を誘導と考え，次のように計算することもできる．

$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}+\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}$ であり，問 1 より

$\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$ は偶関数，$\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}$ は奇関数

であるから，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\{f(-x)-f(-x)\}\,dx$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\{f(x)+f(-x)\}\,dx+0$$
$$=\int_{0}^{\pi}\left\{\frac{3+\cos x}{1+e^{x}}+\frac{3+\cos(-x)}{1+e^{-x}}\right\}dx$$
$$=\int_{0}^{\pi}\left\{\frac{3+\cos x}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}(3+\cos x)}{e^{x}+1}\right\}dx$$
$$=\int_{0}^{\pi}\frac{(1+e^{x})(3+\cos x)}{1+e^{x}}\,dx$$
$$=\int_{0}^{\pi}(3+\cos x)\,dx$$
$$=\Big[3x+\sin x\Big]_{0}^{\pi}=\boldsymbol{3\pi}$$

参考　問 2 (3) は，誘導に乗らずに (1) の微分方程式を直接解いてもよい．

すべての x で $f(x)\fallingdotseq 0$ と仮定する．

(1) より $f'(x)=-f(x)g(x)$ であるから　$\frac{f'(x)}{f(x)}=-g(x)$

両辺を x で不定積分すると，C_3 を積分定数として，

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=-\int g(x)\,dx\qquad\therefore\quad\log|f(x)|=-G(x)+C_3$$

よって，　$|f(x)|=e^{-G(x)+C_3}=e^{-G(x)}\cdot e^{C_3}$　　　$\therefore\quad f(x)=\pm e^{C_3}\cdot e^{-G(x)}$

$f(0)=2$，$G(0)=0$ であるから　$f(0)=\pm e^{C_3}\cdot e^{0}=2$　　　$\therefore\quad \pm e^{C_3}=2$

したがって，

$$f(x)=2e^{-G(x)}=2\cdot\frac{3+\cos x}{2(1+e^{x})}=\boldsymbol{\frac{3+\cos x}{1+e^{x}}}$$

これはすべての x について $f(x)\fallingdotseq 0$ という仮定をみたす．