解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2025年度　杏林大学

【 講 評 】

例年通り，大問3題で出題された．昨年同様，数学Ⅲの出題割合が大きかった．また，問題の難易度差が大きく，試験時間内でうまく立ち回れたかで大きく得点が異なるだろう．全体で6割以上の得点ができれば，1次通過の可能性が高いと思われる．以下，大問ごとに特徴を述べる．

問題Ⅰ　数学Ⅱ微分法（方程式への応用／4次関数の二重接線）【やや易】

前半は4次方程式の解の個数を定数分離で考察する問題で，後半は4次関数のグラフの2重接線を求める問題であった．いずれも典型問題であり，計算量も多くなく誘導も親切であったため，この問題は落とせない．

問題Ⅱ　数Ⅲ微分法（関数の連続･微分可能性）／数Ⅲ積分法（定積分）【標準】

関数の連続・微分可能性に関する問題であった．定義式を覚えていなくても，誘導にしたがって計算を進めれば解けるようになっているため，(b)の微分計算や，(c)の定積分計算など，計算力の有無で大きく差が出ただろう．問題Ⅲが難しい問題であったことから，この問題の出来不出来が合否に大きく影響するだろう．

問題 Ⅲ　(1)　数学Ⅲ微分法（最大･最小）／数学Ⅲ積分法（非回転体の体積，側面積）【難】

(2)　場合の数･確率（確率）／数列（数列と確率）【標準】

(1)は軸が直交する2つの円柱の共通部から，正八面体を除いた部分に関する側面積や体積を求める問題であった．空間図形の扱いに慣れた人でないとかなり解きづらい問題である．一方，(2)は(1)と無関係な確率漸化式の典型問題であった．短い試験時間の中で，(1)を捨てて(2)の解答を進めることができたかどうかが鍵である．

【 解 答 】

Ⅰ．(a)　ア：1,　イ：1,　ウ：1,　エ：6,　オ：1,　カ：−,　キ：5,　ク：3

(b)　ケ：2,　コ：3,　サ：2,　シ：0,　ス：1,　セ：3,　ソ：7

(c)　タ：1, チ：3,　ツ：5,　テ：9,　ト：1,　ナ：0,　ニ：9,　ヌ：2,　ネ：2,　ノ：7

Ⅱ．(a)　ア：0,

(b)　イ：3,　ウ：1,　エ：3,　オ：3,　カ：−,　キ：2,　ク：3,　ケ：−,　コ：2,

(c)　サ：−,　シ：2,　ス：3,　セ：1,　ソ：3,　タ：2,　チ：6,　ツ：3,　テ：5,
ト：3,　ナ：1,　ニ：5,　ヌ：3

Ⅲ．(1)　ア：2,　イ：8,　ウ：−,　エ：8,　オ：8,　カ：8,　キ：3,　ク：2,　ケ：2,　コ：2,
サ：2,　シ：2,　ス：2,

(2)　セ：1,　ソ：3,　タ：1,　チ：6,　ツ：5,　テ：3,　ト：2,　ナ：2,　ニ：1,　ヌ：6,
ネ：2,　ノ：9

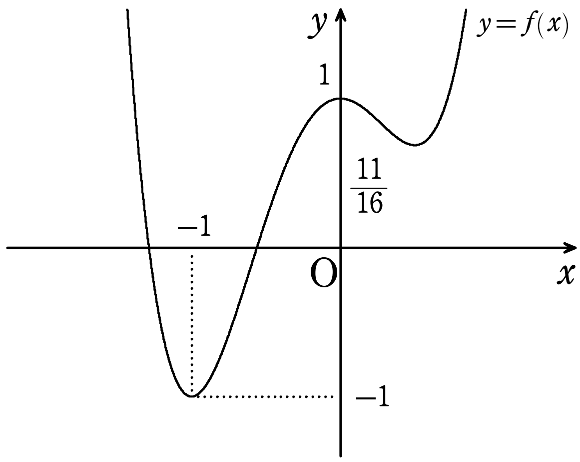
【　解　説　】

I

(a)　$f'(x)=12x^3+6x^2-6x=6x(2x^2+x-1)=6x(x+1)(2x-1)$

より，$f(x)$ の増減表は以下のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{11}{16}$	$\nearrow$



右図から，$f(x)=k$ が異なる 4 つの実数解をもつ，

すなわち $y=f(x)$ と $y=k$ が異なる 4 つの交点を

もつ k の値の範囲　$<k<$　について，

$k_1=\mathbf{\frac{11}{16}}$ (アイウエ)，　$k_2=\mathbf{1}$ (オ)

と，$f(x)=k_1$ は $x=\gamma$，δ を解，$x=\frac{1}{2}$ を重解にもつ．よって，$f(x)-k_1$ は

$(x-\gamma)(x-\delta)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ の定数倍であり，恒等式

$$3x^4+2x^3-3x^2+\frac{5}{16}=3\{x^2-(\gamma+\delta)x+\gamma\delta\}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$$

が成立する．この 3 次の項の係数を比較すると，

$$2=3\{-(\gamma+\delta)-1\} \iff 3(\gamma+\delta)=-5 \qquad \therefore\ \gamma+\delta=\mathbf{\frac{-5}{3}}$$ (カキク)

(b)　$x=\sqrt{2}\,i-1 \iff x+1=\sqrt{2}\,i$

この両辺を 2 乗すると，　$x^2+2x+1=-2$

よって，$x=\sqrt{2}\,i-1$ は 2 次方程式　$g(x)=x^2+\mathbf{2}$ (ケ) $x+\mathbf{3}$ (コ) $=0$　の解であり，

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2-4x-4 \\ \hline
x^2+2x+3 & 3x^4+2x^3-3x^2\qquad\quad+1 \\
 & 3x^4+6x^3+9x^2 \\ \hline
 & -4x^3-12x^2 \\
 & -4x^3-8x^2-12x \\ \hline
 & -4x^2+12x+1 \\
 & -4x^2-8x-12 \\ \hline
 & 20x+13
\end{array}$$

から，$f(x)$ を $g(x)$ で割った余りは $\mathbf{20}$ (サシ) $x+\mathbf{13}$ (スセ) である．

よって，

$$f(x)=(3x^2-4x-4)g(x)+20x+13$$

となり，$g(\sqrt{2}\,i-1)=0$ から，

$$f(\sqrt{2}\,i-1)=20(\sqrt{2}\,i-1)+13=-\mathbf{7}_{(ソ)}+\mathbf{20}_{(サシ)}\sqrt{2}\,i$$

(c)　$y=f(x)$ と $y=ax+b$ が異なる2点で接するとき，接点の x 座標を α，β とすると，恒等式

$$f(x)-(ax+b)=3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

$$\Longleftrightarrow\quad 3x^4+2x^3-3x^2-ax+1-b=3(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x^2-2\beta x+\beta^2)$$

$$=3x^4-6(\alpha+\beta)x^3+3(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-6\alpha\beta(\alpha+\beta)x+3\alpha^2\beta^2$$

が成立し，各項の係数を比較することで，

$$\begin{cases}2=-6(\alpha+\beta)\\ -3=3(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)\\ -a=-6\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ 1-b=3\alpha^2\beta^2\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots①\\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-1 & \cdots\cdots②\\ 6\alpha\beta(\alpha+\beta)=a & \cdots\cdots③\\ 1-3\alpha^2\beta^2=b & \cdots\cdots④\end{cases}$$

①より，　$\alpha+\beta=-\dfrac{\mathbf{1}_{(タ)}}{\mathbf{3}_{(チ)}}$

これと②から，　$(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-1$　　　$\therefore$　$\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{18}=-\dfrac{\mathbf{5}_{(ツ)}}{\mathbf{9}_{(テ)}}$

これらと③，④から，

$$a=6\alpha\beta(\alpha+\beta)=6\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{\mathbf{10}_{(トナ)}}{\mathbf{9}_{(ニ)}}\quad ,$$

$$b=1-3(\alpha\beta)^2=1-3\left(-\frac{5}{9}\right)^2=1-\frac{25}{27}=\frac{\mathbf{2}_{(ヌ)}}{\mathbf{27}_{(ネノ)}}$$

参考　4次方程式の解と係数の関係を覚えておけば，恒等式の変形と係数比較を省略できる．

4次方程式の解と係数の関係

4次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の4解を α，β，γ，δ とするとき，

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-\dfrac{d}{a}\\ \alpha\beta\gamma\delta=\dfrac{e}{a}\end{cases}$$

が成り立つ．

(a) カ～ク

$$f(x)=k_1\quad\Longleftrightarrow\quad 3x^4+2x^3-3x^2+\frac{5}{16}=0$$

この方程式は $x=\gamma$，δ を解，$x=\dfrac{1}{2}$ を重解にもつから，解と係数の関係により，

$$\gamma+\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}\qquad\therefore\quad\gamma+\delta=-\frac{5}{3}$$

(c)　$f(x)-(ax+b)=3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ より，方程式

$$f(x)-(ax+b)=0 \iff 3x^4+2x^3-3x^2-ax+1-b=0$$

は $x=\alpha$，β を重解にもつから，解と係数の関係により，

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+\beta+\beta=-\dfrac{2}{3} \\ \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\dfrac{-3}{3} \\ \alpha^2\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha\beta^2=-\dfrac{-a}{3} \\ \alpha^2\beta^2=\dfrac{1-b}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{1}{3} \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-1 \\ 6\alpha\beta(\alpha+\beta)=a \\ 1-3\alpha^2\beta^2=b \end{cases}$$

参考　(c) は次のように解くこともできる．

$$f(x)-(ax+b)=3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \iff f(x)=3\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^2+ax+b$$

であるから， $f(x)$ をこの形に変形することを考える．

$$\begin{aligned} f(x)&=3x^4+2x^3-3x^2+1=3\left(x^4+\frac{2}{3}x^3\right)-3x^3+1 \\ &=3\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)^2-\frac{10}{3}x^2+1 \\ &=3\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)^2-\frac{10}{3}\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)+\frac{10}{9}x+1 \\ &=3\left\{\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)^2-\frac{10}{9}\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)\right\}+\frac{10}{9}x+1 \\ &=3\left\{\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)-\frac{5}{9}\right\}^2+\frac{10}{9}x+\frac{2}{27} \end{aligned}$$

よって，　$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{3}$，$\alpha\beta=-\dfrac{5}{9}$，$a=\dfrac{10}{9}$，$b=\dfrac{2}{27}$

Ⅱ

(a)　$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき，

$$\tan x<x<\sin x \iff \tan x-\sin x<x-\sin x<0$$

$x^2>0$ で各辺を割ると　$\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}<\dfrac{x-\sin x}{x^2}<0$　……①

ここで，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}&=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{x\cos x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x\cos x}\\&=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\cos x}\\&=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{1}=0\end{aligned}$$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0_{(オ)}$

注意

はさみうちの原理の利用に気づいていれば，① の段階で極限値が 0 になることは明白である．試験中に左辺の極限計算をすべきではないだろう．

参考　$\dfrac{0}{0}$ 型の不定形であるから，答えを出すだけであれば，ロピタルの定理を用いてもよい．

$$\lim_{x\to-0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to-0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{2}=0$$

(b)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{b}{3_{(イ)}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-0}f(x)&=\lim_{x\to-0}\frac{(3-2x)\sin2x}{6x\cos x}=\lim_{x\to-0}\frac{(3-2x)\cdot2\sin x\cos x}{6x\cos x}\\&=\lim_{x\to-0}\frac{(3-2x)\sin x}{3x}=\lim_{x\to-0}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{3}\sin x\right)\\&=1_{(ウ)}\end{aligned}$$

$f(x)$ が $x=0$ で連続であることから，$\displaystyle f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)$ が成り立つから，

$$\frac{b}{3}=\frac{b}{3}=1\qquad\therefore\quad b=3_{(エ)}$$

$x>0$ のとき，

$$f'(x)=\frac{a\sqrt{x^2+9}-(ax+3)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=\frac{a(x^2+9)-(ax^2+3x)}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}=\frac{9a-3x}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

よって，　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\frac{9a}{9\sqrt{9}}=\frac{a}{3_{(オ)}}$

また，$x<0$ のとき $f(x)=\dfrac{(3-2x)\sin2x}{6x\cos x}=\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{3}\sin x$ であるから，

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{2}{3}\cos x=\frac{x-\sin x-x+x\cos x}{x^2}-\frac{2}{3}\cos x$$
$$=\frac{x-\sin x}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x}-\frac{2}{3}\cos x=\frac{x-\sin x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\sin x}-\frac{2}{3}\cos x$$

よって，(a) の結果を利用すると，

$$\lim_{x\to -0} f'(x)=0-1\cdot\frac{0}{2}-\frac{2}{3}=\frac{-2_{(カキ)}}{3_{(ク)}}$$

$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることから，$\lim_{x\to +0} f'(x)=\lim_{x\to -0} f'(x)$ が成り立つから

$$\frac{a}{3}=-\frac{2}{3} \qquad \therefore \quad a=-2_{(ケコ)}$$

(c)　(b) より，$f(0)=1$，$f'(0)=-\frac{2}{3}$ であるから，$y=f(x)$ の $x=0$ における接線の方程式は，

$$y=\frac{-2_{(サシ)}}{3_{(ス)}}x+1_{(セ)}$$

これと $y=f(x)$ $(x\geqq 0)$ の式を連立すると，

$$-\frac{2}{3}x+1=\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}} \quad \Leftrightarrow \quad (2x-3)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right)=0$$

$x>0$ のとき，$0<\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}<\frac{1}{3}$ より $\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\neq 0$ であるから，接線と $y=f(x)$ の交点のうち $x>0$ を満たす点の x 座標 u は　$u=\frac{3_{(ソ)}}{2_{(タ)}}$

このことから，

$$\int_0^u f(x)dx=\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{-2x}{\sqrt{x^2+9}}dx+\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}dx$$

ここで，

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{-2x}{\sqrt{x^2+9}}dx=-\int_0^{\frac{3}{2}}2x(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}=-\left[2(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{3}{2}}$$
$$=-2\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}+3\right)=6-3\sqrt{5}$$

また，$\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right\}'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　……(*)　であることから，

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=\left[3\log\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\right]_0^{\frac{3}{2}}=3\left\{\log\left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)-\log 3\right\}$$
$$=3\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

以上により，

$$\int_0^u f(x)dx=6_{(チ)}-3_{(ツ)}\sqrt{5_{(テ)}}+3_{(ト)}\log\frac{1_{(ナ)}+\sqrt{5_{(ニ)}}}{2_{(ヌ)}}$$

補足 (*)は下記を用いている．計算量を大幅に省略できるため，必ず覚えてもらいたい．

$$\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\right\}'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx=\log\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C \quad (C\text{は積分定数})$$

別解 (c) チ〜ヌ は置換積分法を用いると次のようになる．

$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ において $x=3\tan\theta$ とおく．

$$dx=\frac{3}{\cos^2\theta}\,d\theta,$$

x	$0 \to \frac{3}{2}$
θ	$0 \to \alpha$

ただし α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ ……② を満たす実数とする．

これらを用いると，

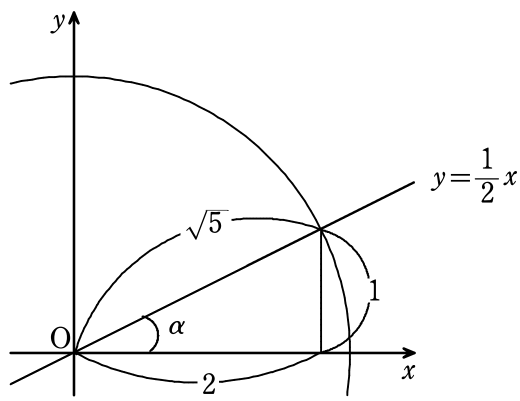
$$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=\int_0^{\alpha}\frac{3}{\sqrt{9\tan^2\theta+9}}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$==\int_0^{\alpha}\frac{1}{\frac{1}{\cos\theta}}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta \quad \left(\because\ 0\leqq\theta\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=3\int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=3\int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\alpha}\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\Big[-\log|1-\sin\theta|+\log|1+\sin\theta|\Big]_0^{\alpha}=\frac{3}{2}\log\left|\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right|$$

② より $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であるから，



$$\therefore\ \int_0^{\frac{3}{2}}\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}dx=\frac{3}{2}\log\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}\right|=\frac{3}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{3}{2}\log\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}=3\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

以上により，

$$\int_0^{u}f(x)dx=6_{(チ)}-3_{(ツ)}\sqrt{5}_{(テ)}+3_{(ト)}\log\frac{1_{(ナ)}+\sqrt{5}_{(ニ)}}{2_{(ヌ)}}$$

Ⅲ

(1)　L 上の点 $(x,\ y,\ z)$ について，x 軸および y 軸からの距離が共に 1 であることから，

$$\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\pm x \\ x^2+z^2=1 \end{cases}$$

原点を通り $y=\pm x$ に平行で，単位長さが x，y 軸と一致する座標をとった軸を X 軸とすると，

$$① \iff \begin{cases} (x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{X}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{X}{\sqrt{2}},\ z\right) \\ x^2+z^2=1 \end{cases}$$

よって，$\dfrac{X^2}{2}+z^2=1$ が成り立ち，これは Xz 平面上の長半径 $\sqrt{2}$，短半径 1 の楕円を表す.

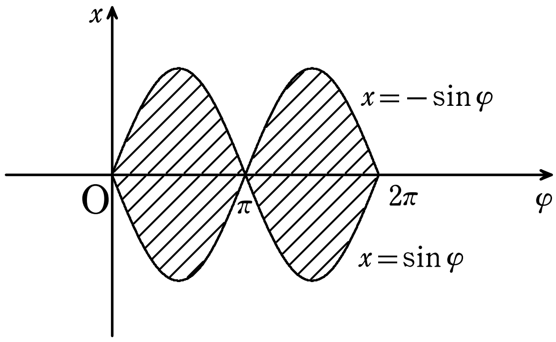
したがって，その内部の面積は　$\sqrt{2}\cdot 1\cdot\pi=\sqrt{2}_{(ア)}\pi$

K に属し，x 軸からの距離が 1 であるような点 $(x,\ y,\ z)$ は $\begin{cases} y^2+z^2=1 & \cdots\cdots ① \\ x^2+z^2\leqq 1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を満たす.

① 上の点は $(x,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi)\ (0\leqq\varphi<2\pi)$ とおけ，これが ② 上にあるとき，

$$x^2+\cos^2\varphi\leqq 1 \qquad \therefore\ \ x^2\leqq 1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi$$

この φx 平面における領域（右図の斜線部分）が，K に属する点のうち，x 軸からの距離が 1 であるような領域の展開図である．ただし，x 軸に垂直な平面で切ったときの，$0\leqq\varphi\leqq a<2\pi$ の領域の長さは a に一致することから，φ 軸の単位長さと下の座標系の単位長さは等しい．対称性からこの面積は



$$4\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=4\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi}=4(1+1)=8_{(イ)}$$

K に属する点 $(x,\ y,\ z)$ は $\begin{cases} y^2+z^2\leqq 1 \\ x^2+z^2\leqq 1 \end{cases}$ ……③ を満たすので，$z=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ において，

$$\begin{cases} y^2+t^2\leqq 1 \\ x^2+t^2\leqq 1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} -\sqrt{1-t^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-t^2} \\ -\sqrt{1-t^2}\leqq x\leqq\sqrt{1-t^2} \end{cases} \cdots ④$$

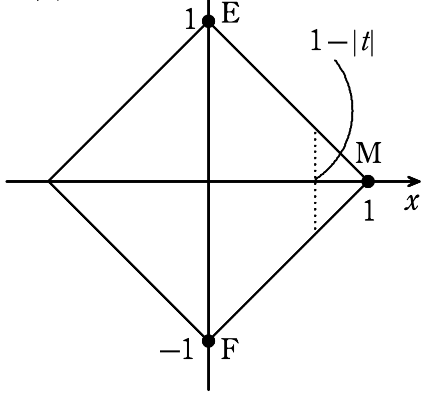
また，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　であり，AD の中点 $(1,\ 0,\ 0)$ を M とすると，

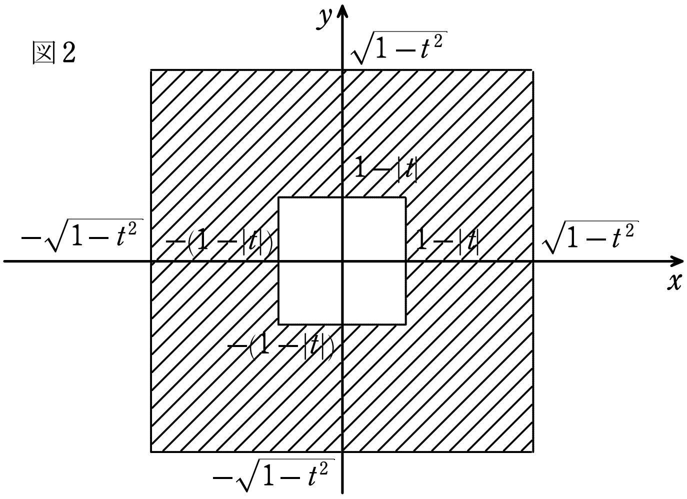
図 1 からその一辺の長さは　$2(1-|t|)$

これと ④ から，K の $z=t$ における断面は図 2 の斜線部分となり，その面積は

$$(2\sqrt{1-t^2})^2-\{2(1-|t|)\}^2=4-4t^2-4(1-2|t|+t^2)=-8_{(ウエ)}t^2+8_{(オ)}|t|$$

図 1





③に $x=u\ (0\leqq u\leqq 1)$ を代入すると，　$\begin{cases} y^2+z^2\leqq 1 \\ u^2+z^2\leqq 1 \end{cases}$

$u=\cos\theta\left(0<\theta<\dfrac{u}{2}\right)$ より，

$$\begin{cases} y^2+z^2\leqq 1 \\ z^2\leqq 1-\cos^2\theta \end{cases}\quad \therefore\quad \begin{cases} y^2+z^2\leqq 1 \\ -\sin\theta\leqq z\leqq\sin\theta \end{cases}\quad \cdots⑤$$

対称性から，八面体 E−ABCD−F の $x=u$ における断面の，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ の部分を考える．

図3

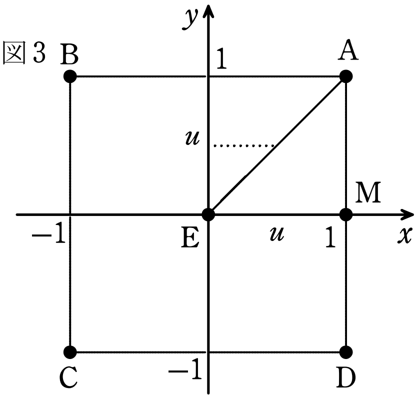


図4

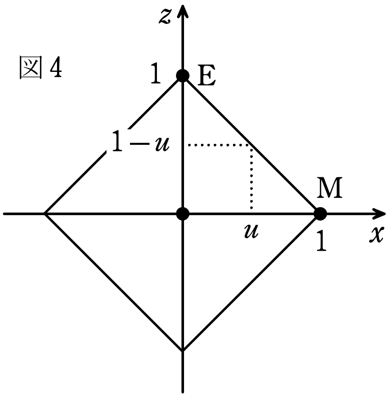
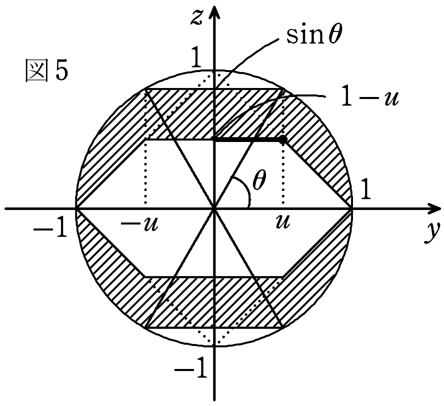


図5



これと⑤から，K の $x=u$ における断面は図5の斜線部分となる．この面積 S について，

$$\frac{S}{4}=\frac{1^2\cdot\theta}{2}+\frac{u\sin\theta}{2}-\frac{1-u}{2}-\frac{u(1-u)}{2}=\frac{\theta+u\sin\theta-1+u^2}{2}$$

$$=\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{2}\quad(\because\ u=\cos\theta)$$

$$=\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{1+\cos 2\theta}{4}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad S=\mathbf{2}_{(ク)}\theta+\sin(\mathbf{2}_{(ケ)}\theta)+\cos(\mathbf{2}_{(コ)}\theta)-\mathbf{1}_{(サ)}$$

これを θ について微分すると，

$$\frac{dS}{d\theta}=2+2\cos 2\theta-2\sin 2\theta=2\left\{1-\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$\dfrac{dS}{d\theta}=0$ のとき　$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}<2\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ であるから　$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$　　$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$

したがって，S の $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における増減表は以下のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

以上から，S は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，つまり $u=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}_{(サ)}}}{\mathbf{2}_{(シ)}}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}-1=\dfrac{\pi}{\mathbf{2}_{(ス)}}$ をとる．

(2) 時刻 $t=0$ のとき，動点Pは点Eに存在するから $p_0=1$，$q_0=0$ とする．また，

$\boxed{n\text{秒後}}$

① 点Eに存在する確率：p_n

② 点Fに存在する確率：q_n

③ 点A，B，C，Dのいずれか（xy 平面上）
　に存在する確率：$1-p_n-q_n$

$\boxed{n+1\text{秒後}}$

④ 点Eに存在する確率：p_{n+1}

⑤ 点Fに存在する確率：q_{n+1}

である．

①→④，①→⑤，②→④，②→⑤となることはなく，③→④となる確率は $\frac{1}{3}$，③→⑤となる確率は $\frac{1}{6}$ であるから，

$$p_{n+1}=\frac{1_{(セ)}}{3_{(ソ)}}(1-p_n-q_n)\quad,\quad q_{n+1}=\frac{1_{(タ)}}{6_{(チ)}}(1-p_n-q_n)$$

$1-p_n-q_n=r_n$ とおくと，

$$r_{n+1}=1-p_{n+1}-q_{n+1}=1-\frac{1}{3}r_n-\frac{1}{6}r_n$$
$$=-\frac{1}{2}r_n+1$$

これを変形すると　$r_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(r_n-\frac{2}{3}\right)$

$\left\{r_n-\frac{2}{3}\right\}$ は等比数列であり，$r_0=0$ であるから，

$$r_n-\frac{2}{3}=\left(r_0-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \therefore\ r_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\quad\cdots⑥$$

A，B．C．Dの対等性から，動点Pが4秒後に点Aに存在する確率は，

$$\frac{r_4}{4}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5_{(ツ)}}{32_{(テト)}}$$

$n\geqq 2$ のとき　$q_n=\frac{1}{6}r_{n-1}=\frac{1}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\quad\cdots⑦$

$q_1=0$ より q_n が最大となるのは，$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ が $n\geqq 2$ で最大となるときで，これは n に関して絶対値が減少するため，

$$n-2=0 \qquad \therefore\ n=2_{(ナ)}\text{ 秒後}$$

に最大となる．その確率は　$p_2=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1_{(ニ)}}{6_{(ヌ)}}$

また，⑥より $\lim_{n\to\infty}r_n=\frac{2}{3}$，⑦より $\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{9}$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}(1-r_n-q_n)=1-\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2_{(ネ)}}{9_{(ノ)}}$$