解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2025年度　日本医科大学後期

【　講　評　】

例年通り，大問４題で出題された．出題形式にも変化はなかった．昨年の後期試験と比較すると，難易度，計算量共に同程度であった．６割を目指したい．以下，大問ごとに述べる．

［Ⅰ］ 確率【標準】

さいころのの目の結果に応じて，箱の中の球の色を変更させる問題であった．漸化式を用いて解く（解答参照）と容易であるが，素直に３回分の試行を調べるとある程度時間を要する．差がつきそうな問題である．

［Ⅱ］ 積分法（体積）／関数と極限（無限級数）【やや易】

問１は楕円を回転させて得られる立体の体積を求める問題で，簡単な定積分計算で求めることができる．また，パップスギュルダンの定理を知っていれば，即座に答えを求められる．問２は無限級数の問題であり，数列の和の計算量も標準的で，方針で悩む点もないため，完答したい問題である．

［Ⅲ］ 微分法（最大値・最小値）／積分法（面積）【標準】

問１は楕円の法線の方程式を求めるだけである．問２は与えられた文字を用いて関数の極値を求め，グラフを図示するだけである．問３は問１で求めた法線の通過領域を求める問題で，問２の誘導にしたがって，法線上の x 座標を固定したときの y 座標の値域を求めるだけであるが，通過領域は苦手とする受験生が多いため，差がつきそうな問題である．問４は問３で求めた領域の面積を求めるだけであるが，問３ができなくて解けなかった人も少なくないだろう．

［Ⅳ］ 複素数平面（極形式）／積分法（定積分，区分求積法）【やや難】

問１は複素数の実部や虚部の条件から，偏角とその個数を求める問題であるが，文字が多く計算量や処理が多く難しい．問１で正解が求められないと，問２以降が解けないため，全体的に出来が悪かったのではないだろうか．問１ができれば，問２は極形式の計算（ド・モアブルの定理），問３は不等式証明，問４ははさみうちの原理と区分求積法と典型的なものであった．

【　解　答　】

［Ⅰ］

問1　ア：1,　　イ：3,

問2　ウ：5,　　エ：108,

問3　オ：5,　　カ：72,

問4　キ：25,　　ク：104

［Ⅱ］

問1　$V(a,\ b)=2ab\pi^2$

問2　$X_n(a)=4\pi^2(2a)^{n-1}$

問3　収束するための必要十分条件：$0<a<\dfrac{1}{2}$，無限級数の和：$\dfrac{4\pi^2}{(1-2a)^2}$

［Ⅲ］

問1　ア：$-\sqrt{2}\tan\theta$，　イ：$\sin\theta$

問2　$f(\alpha)=\left(1-k^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$，グラフは解説参照

問3　解説参照

問4　$S=\dfrac{\sqrt{2}}{128}(3\pi+4)$

［Ⅳ］

問1　$N_n=1$，$\theta_{n,\ k}=\dfrac{4k-3}{2(4n+1)}\pi$

問2　$(z_{n,\ k})^{4n+1}=i$

問3　解説参照

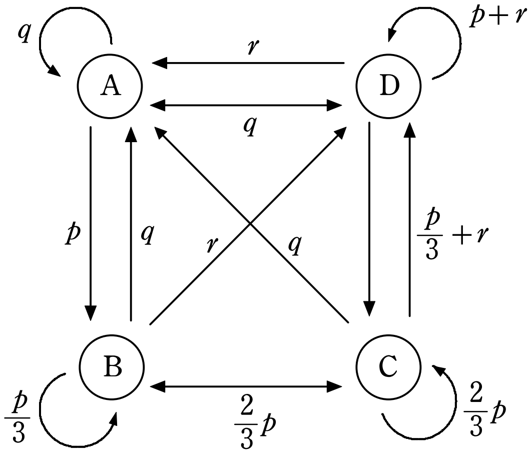
問4　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n}\frac{w_{n,k}}{i}=\frac{2(\pi+4)}{3\pi}$

【　解　説　】

［Ⅰ］

箱 1，箱 2，箱 3 の白球の合計の個数が 3 個，2 個，1 個，0 個 である状態をそれぞれ A，B，C，D とする．

各状態の推移は次のようになる．



ただし，図中の p，q，r については，

　　操作（ i ）が起こる確率 $p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

　　操作（ii）が起こる確率 $q=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

　　操作（iii）が起こる確率 $r=\frac{1}{6}$

である．

操作を n 回行ったときに，状態 A，B，C，D である確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とすると，以下の漸化式が成り立つ．

$$
\begin{cases}
a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{3}d_n & \cdots\cdots ① \\
b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{6}b_n & \cdots\cdots ② \\
c_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n & \cdots\cdots ③ \\
d_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{2}{3}d_n & \cdots\cdots ④
\end{cases}
$$

ただし，操作を行う前は状態 A であるから，$a_0=1$，$b_0=c_0=d_0=0$ と定義する．

① ～ ④ を繰り返し用いると，

$$a_1=\frac{1}{3},\ b_1=\frac{1}{2},\ c_1=0,\ d_0=\frac{1}{6}$$

$$a_2=\frac{1}{3},\ b_2=\frac{1}{4},\ c_2=\frac{1}{6},\ d_2=\frac{1}{4}$$

$$a_3=\frac{1}{3},\ b_3=\frac{5}{24},\ c_3=\frac{5}{36},\ d_3=\frac{23}{72}$$

となる．

(1)　さいころを3回投げたとき，箱1，箱2，箱3の中に入っている球がすべて白球である確率は

$$a_3=\frac{1}{3}$$

(2)　さいころを3回投げたとき，箱1，箱2に入っている球が共に黒球であり，箱3の中に入っている球が白球である確率は，

$$\frac{1}{3}\times c_3=\frac{5}{108}$$

(3)　さいころを3回投げたとき，箱1の中に入っている球が黒球であり，箱2，箱3の中に入っている球が共に白球である確率は，

$$\frac{1}{3}\times b_3=\frac{5}{72}$$

(4)　さいころを3回投げたとき，箱1の中に入っている球が黒球である確率は

$$\frac{1}{3}\times b_3+\frac{2}{3}\times c_3+d_3=\frac{5}{72}+\frac{10}{108}+\frac{23}{72}=\frac{15+20+69}{216}=\frac{104}{216}$$

また，さいころを3回投げたとき，箱1の中に入っている球が黒球で，箱3の中に入っている球が白球である確率は

$$\frac{1}{3}\times b_3+\frac{1}{3}\times c_3=\frac{5}{72}+\frac{5}{108}=\frac{15+10}{216}=\frac{25}{216}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{25}{216}\times\frac{216}{104}=\frac{25}{104}$$

別解　漸化式を用いずに解くと，次のようになる.

操作(ⅰ)について，1，2，3の目が出る事象をそれぞれA_1，A_2，A_3とする.

また，操作(ⅱ)，(ⅲ)が起こる事象をそれぞれB，Cとおく.

Bが起こるとすべての箱の中の球が白球となり，Cが起こるとすべての箱の中の球が黒球となるから，BとCが起こる回数に注目する.

問1

3回目にCが起こる確率であるから，その確率は $\frac{1}{3}$

問2

(ⅰ) Bが起こらないとき

A_1が2回，A_2が1回，またはA_1が1回，A_2が2回起こるときであるから，その確率は

$$2\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

(ⅱ) Bが起こるとき

1回目にBが起こり，その後の2回でA_1とA_2が1回ずつ起こるときであるから，

$$\frac{1}{3}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{54}$$

(ⅰ), (ⅱ) より，求める確率は

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{54}=\mathbf{\frac{5}{108}}$$

問 3

(ⅰ) B が起こらないとき

A_1 が 3 回起こるときであるから，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$

(ⅱ) B が起こるとき

B が 2 回目に起こり，3 回目に A_1 が起こるとき　$1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

B が 1 回目に起こり，2 回目，3 回目に A_1 が起こるとき　$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{108}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{216}+\frac{1}{18}+\frac{1}{108}=\frac{1+12+2}{216}=\mathbf{\frac{5}{72}}$$

問 4

まず，3 回の操作後に箱 1 の中が黒球となる確率を考える.

(ア) B が起こらないとき

A_1 または C が少なくとも 1 回起こるときであるから， B が起こらない確率から， A_1， B， C がいずれも起こらない確率を引いて，

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{27}$$

(イ) B が起こるとき

(ⅰ) B が 1 回目に起こるとき

残り 2 回は B 以外が起こり，少なくとも 1 回 A_1 または C が起こるときであるから，

$$\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{1}{9}$$

(ⅱ) B が 2 回目に起こるとき

1 回目は任意，3 回目は A_1 または C が起こるときであるから，

$$1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{9}$$

(ア), (イ) より

$$\frac{7}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{13}{27}$$

次に，問 2，問 3 より 3 回の操作の後に箱 1，箱 3 の中が黒球となる確率は

$$\frac{5}{108}+\frac{5}{72}=\frac{10+15}{216}=\frac{25}{216}$$

以上により，求める条件付き確率は

$$\frac{25}{216}\times\frac{27}{13}=\mathbf{\frac{25}{104}}$$

［Ⅱ］

問 1

$x^2+\dfrac{(y-b)^2}{a^2}=1$ より　$(y-b)^2=a^2(1-x^2)$

$$y-b=\pm\sqrt{a^2(1-x^2)}\qquad\therefore\quad y=b\pm a\sqrt{1-x^2}\ (\because\ a>0)$$

よって，求める体積は

$$V(a,\ b)=\pi\int_{-1}^{1}\left\{\left(b+a\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(b-a\sqrt{1-x^2}\right)^2\right\}dx$$
$$=4\pi ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ は単位円の半分の面積を表すから，

$$V(a,\ b)=4\pi ab\times\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{2ab\pi^2}$$

問 2

$$W_{n,j}(a)=V\left(a^{n-1},\ 1+\frac{2j-1}{2^{n-1}}\right)=2a^{n-1}\left(1+\frac{2j-1}{2^{n-1}}\right)\pi^2$$
$$=2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\pi^2(2^{n-1}+2j-1)$$

よって，

$$X_n(a)=\sum_{j=1}^{2^{n-1}}W_{n,j}(a)=2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\pi^2\sum_{j=1}^{2^{n-1}}(2^{n-1}+2j-1)$$
$$=2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\pi^2\left\{2^{n-1}\cdot2^{n-1}+\frac{1}{2}(1+2^n-1)\cdot2^{n-1}\right\}$$
$$=2\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\pi^2\cdot2\cdot4^{n-1}$$
$$=\boldsymbol{4\pi^2(2a)^{n-1}}$$

問 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}nX_n(a)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}kX_k(a)=\lim_{n\to\infty}4\pi^2\sum_{k=1}^{n}k(2a)^{k-1}$$

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(2a)^{k-1}$ とおくと，

$$S=1+2\cdot(2a)+3\cdot(2a)^2+\cdots\cdots+n\cdot(2a)^{n-1}$$
$$2aS=1\cdot(2a)+2\cdot(2a)^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot(2a)^{n-1}+n\cdot(2a)^n$$

両辺の差をとると，$0<a<1$ より

$$(1-2a)S=1+2a+(2a)^2+\cdots\cdots+(2a)^{n-1}-n(2a)^n$$
$$=\frac{1-(2a)^n}{1-2a}-n(2a)^n$$

$$\therefore\quad S=\frac{1-(2a)^n}{(1-2a)^2}-\frac{n(2a)^n}{1-2a}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S$ が収束するための必要十分条件は，

$$-1<2a<1\qquad\therefore\quad \boldsymbol{0<a<\frac{1}{2}}\ (\because\ 0<a<1)$$

よって，求める無限級数の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} nX_n(a)=\lim_{n\to\infty} 4\pi^2\left\{\frac{1-(2a)^n}{(1-2a)^2}-\frac{n(2a)^n}{1-2a}\right\}=\frac{4\pi^2}{(1-2a)^2}$$

別解　問1の体積は「パップスギュルダンの定理」を用いると，容易に求めることができる.

不等式 $x^2+\dfrac{(y-b)^2}{a^2}\leqq 1$ により定まる領域は，楕円 $x^2+\dfrac{(y-b)^2}{a^2}=1$ の周上及び内部であるから，その面積は

$$\pi\cdot 1\cdot a=a\pi$$

また，この楕円の中心 $(0,\ b)$ は重心でもあり，この点を x 軸の周りに回転させたときの周の長さは

$$2\pi b$$

よって，求める体積は

$$V(a,\ b)=a\pi\times 2\pi b=2ab\pi^2$$

補足　問3の無限級数の和は頻出であるから，結果を覚えておくとよい.

$-1<r<1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$ となることと同様に，

$$\sum_{n=1}^{\infty} anr^{n-1}=\frac{a}{(1-r)^2}$$

となることを覚えておけば，和の計算を省略して答えを求めることができる.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nX_n(a)=\sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 k(2a)^{k-1}=\frac{4\pi^2}{(1-2a)^2}$$

[Ⅲ]

問 1

$\mathrm{P}(\sqrt{2}\cos\theta,\ -\sin\theta)$ における曲線 C の接線の方程式は

$$(\sqrt{2}\cos\theta)x+2(-\sin\theta)y=2 \qquad \therefore\quad (\sqrt{2}\cos\theta)x-(2\sin\theta)y=2$$

であるから，点 P における曲線 C の法線の方程式 L_θ は

$$(2\sin\theta)(x-\sqrt{2}\cos\theta)+(\sqrt{2}\cos\theta)(y+\sin\theta)=0$$

$$y+\sin\theta=-\sqrt{2}\tan\theta(x-\sqrt{2}\cos\theta)\quad \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\ より\cos\theta\neq 0\right)$$

$$\therefore\quad y=(-\sqrt{2}\tan\theta)x+\sin\theta$$

問 2

$f(\theta)=-k\tan\theta+\sin\theta$ について，

$$f'(\theta)=-\frac{k}{\cos^2\theta}+\cos\theta=\frac{\cos^3\theta-k}{\cos^2\theta}$$

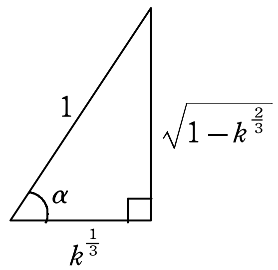
$f'(\theta)=0$ となるのは，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$，$k>0$ であるから

$$\cos^3\theta=k \qquad \therefore\quad \cos\theta=k^{\frac{1}{3}}$$

よって，$\cos\alpha=k^{\frac{1}{3}}$ であり，$f(\theta)$ の増減は次のようになる.

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\cos\alpha=k^{\frac{1}{3}}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より



$$\sin\alpha=\sqrt{1-k^{\frac{2}{3}}}\ ,\quad \tan\alpha=\frac{\sqrt{1-k^{\frac{2}{3}}}}{k^{\frac{1}{3}}}$$

であるから，

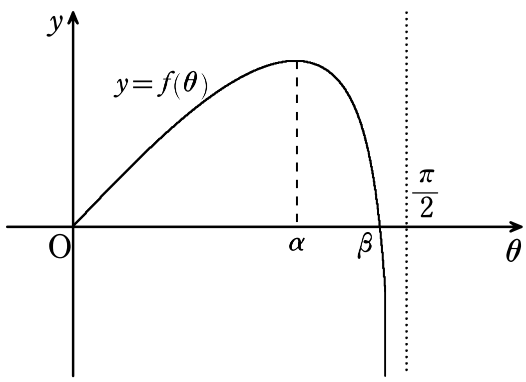
$$f(\alpha)=-k\tan\alpha+\sin\alpha=-k\cdot\frac{\sqrt{1-k^{\frac{2}{3}}}}{k^{\frac{1}{3}}}+\sqrt{1-k^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\sqrt{1-k^{\frac{2}{3}}}\left(1-k^{\frac{2}{3}}\right)=\left(1-k^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

また，

$$\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=0,\quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}f(\theta)=-\infty$$

であるから，$y=f(\theta)$ のグラフは右図のようになる.



問 3

問 1 の L_θ について，$x=0$ のとき $y=\sin\theta$　　$\therefore$　$0<y<1$

$0<x\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき，$0<\sqrt{2}\,x\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{4}<1$ であるから，x をこの範囲で固定し $\sqrt{2}\,x=k$ とおくと，

問 1 の L_θ の方程式より，

$$y=-k\tan\theta+\sin\theta=f(\theta)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，問 2 より

$$y=f(\theta)\leqq f(\alpha)=\left(1-k^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left\{1-(\sqrt{2}\,x)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

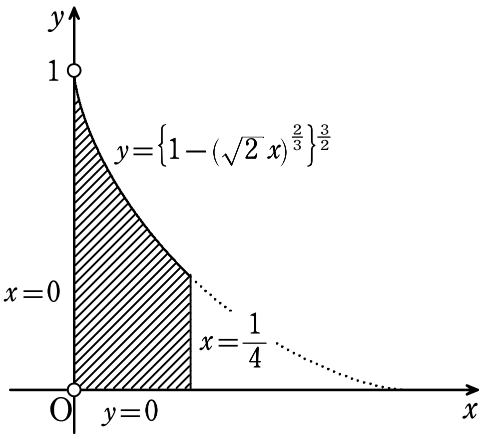
$y\geqq 0$ であるから　$0\leqq y\leqq\left\{1-(\sqrt{2}\,x)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$

よって D は連立不等式

$$\begin{cases}x=0\\ 0<y<1\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}0<x\leqq\dfrac{1}{4}\\ 0\leqq y\leqq\left\{1-(\sqrt{2}\,x)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\end{cases}$$

で表される領域であるから，これを図示すると右の図の斜線部分となる.

ただし，境界線は $x=0$ 以外含む.



問 4

求める面積は，問 3 の図の斜線部分であるから，

$$S=\int_0^{\frac{1}{4}}y\,dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\left\{1-(\sqrt{2}\,x)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}dx$$

$(\sqrt{2}\,x)^{\frac{1}{3}}=\sin u\ \left(0<u<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，　$\sqrt{2}\,x=\sin^3 u$　　$\therefore$　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin^3 u$

よって，　$\dfrac{dx}{du}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos u\sin^2 u$ ，

x	$0\ \to\ \dfrac{1}{4}$
u	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{4}$

$\left(\because\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

したがって，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2 u)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cos u\sin^2 u\ du=\frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 u\cos^4 u\ du$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 2u}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2u}{2}\ du=\frac{3\sqrt{2}}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2u(1+\cos 2u)\,du$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\cos 4u}{2}+\cos 2u\sin^2 2u\right)du$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{16}\left[\frac{1}{2}\left(u-\frac{\sin 4u}{4}+\frac{1}{6}\sin^3 2u\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{16}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}\cdot 1\right)=\frac{\sqrt{2}}{128}(3\pi+4)$$

[Ⅳ]

$|z|=1$，かつ $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\mathrm{Im}(z)>0$ を満たすから，$0<\theta<\pi$ なる θ が存在して

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

と表せる.

問 1

$G(w_n)$ は三角形 ABC の重心であるから，

$$w_n=\frac{1}{3}(z^{4n}+|z+1|^2z^{4n+1}+z^{4n+2})$$

と表せる.

$$\begin{aligned}|z+1|^2&=|(1+\cos\theta)+i\sin\theta|^2=(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\\&=2(1+\cos\theta)\end{aligned}$$

であるから，w_n の実部について，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(w_n)&=\frac{1}{3}\{\cos4n\theta+2(1+\cos\theta)\sin(4n+1)\theta+\cos(4n+2)\theta\}\\&=\frac{1}{3}\{\cos(4n+2)\theta+\cos4n\theta+2(1+\cos\theta)\cos(4n+1)\theta\}\\&=\frac{1}{3}\{2\cos(4n+1)\theta\cos\theta+2(1+\cos\theta)\cos(4n+1)\theta\}\\&=\frac{2}{3}\cos(4n+1)\theta(2\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$w_n+\overline{w_n}=2\mathrm{Re}(w_n)=0$ を満たすとき，

$$\cos(4n+1)\theta(2\cos\theta+1)=0 \qquad \therefore\quad \cos(4n+1)\theta=0 \quad \text{または} \quad \cos\theta=-\frac{1}{2}$$

$0<\theta<\pi$ より $0<(4n+1)\theta<(4n+1)\pi$ であるから，

$$\cos\theta=-\frac{1}{2} \text{ より } \quad \theta=\frac{2}{3}\pi$$

$$\cos(4n+1)\theta=0 \text{ より } \quad (4n+1)\theta=\frac{\pi}{2}+l\pi \quad (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 4n)$$

また，w_n の虚部について

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(w_n)&=\frac{1}{3}\{\sin4n\theta+2(1+\cos\theta)\sin(4n+1)\theta+\sin(4n+2)\theta\}\\&=\frac{1}{3}\{\sin(4n+2)\theta+\sin4n\theta+(1+\cos\theta)\sin(4n+1)\theta\}\\&=\frac{1}{3}\{2\sin(4n+1)\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)\sin(4n+1)\theta\}\\&=\frac{2}{3}\sin(4n+1)\theta(2\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$\dfrac{w_n-\overline{w_n}}{2i}=\mathrm{Im}(w_n)>\dfrac{2}{3}$ を満たすとき，

$$\frac{2}{3}\sin(4n+1)\theta(2\cos\theta+1)>\frac{2}{3} \qquad \therefore\quad \sin(4n+1)\theta(2\cos\theta+1)>1 \quad \cdots\cdots①$$

$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，不等式①は成り立たない.

$(4n+1)\theta=\dfrac{\pi}{2}+l\pi$ のとき，

$$\sin(4n+1)\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\pi\right)=(-1)^l$$

であるから，不等式 ① が成り立つのは

$$\begin{cases} l\text{ が偶数} \\ \cos\theta>0 \end{cases} \cdots\cdots ② \quad \text{または} \quad \begin{cases} l\text{ が奇数} \\ \cos\theta<-1 \end{cases} \cdots\cdots ③$$

であるが，③ は不適である．

よって，② が成り立つとき

$$\theta=\frac{2l+1}{2(4n+1)}\pi,\quad l=0,\ 2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 2n-2$$

であるから，これを自然数 k を用いて表すと，

$$\theta_{n,k}=\frac{4k-3}{2(4n+1)}\pi,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$$

したがって，　$\boldsymbol{N_n=n}$，$\boldsymbol{\theta_{n,k}=\dfrac{4k-3}{2(4n+1)}\pi}$

問 2

$z_{n,k}=\cos\theta_{n,k}+i\sin\theta_{n,k}$ であるから，

$$\begin{aligned}(z_{n,k})^{4n+1}&=\cos(4n+1)\theta_{n,k}+i\sin(4n+1)\theta_{n,k}\\&=\cos\left(\frac{4k-3}{2}\right)\pi+i\sin\left(\frac{4k-3}{2}\right)\pi\\&=\cos\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi+i\sin\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi\\&=\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

問 3

$N_n=n$，$\theta_{n,k}=\dfrac{4k-3}{2(4n+1)}\pi$ について，$n\geqq1$，$1\leqq k\leqq n$ であるから，

$$\frac{k}{2n}\pi-\frac{4k-3}{2(4n+1)}\pi=\frac{k(4n+1)-(4k-3)n}{2n(4n+1)}\pi=\frac{k+3n}{2n(4n+1)}\pi>0$$

$$\frac{4k-3}{2(4n+1)}\pi-\frac{k-1}{2n}\pi=\frac{n(4k-3)-(k-1)(4n+1)}{2n(4n+1)}\pi=\frac{n-k+1}{2n(4n+1)}\geqq0$$

よって，$\dfrac{k-1}{2N_n}\leqq\theta_{n,k}\leqq\dfrac{k}{2N_n}\pi$ が成り立つ．

問 4

$N_n=n$ であるから　$\dfrac{1}{N_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_n}\frac{w_{n,k}}{i}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{w_{n,k}}{i}$

$z_{n,k}=\cos\theta_{n,k}+i\sin\theta_{n,k}$ について，

$$z_{n,k}+\frac{1}{z_{n,k}}=z_{n,k}+z_{n,k}{}^{-1}=2\cos\theta_{n,k}$$

であるから，

$$w_n=\frac{1}{3}\left(z_{n,k}{}^{4n}+|z+1|^2 z_{n,k}{}^{4n+1}+z_{n,k}{}^{4n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}z_{n,k}{}^{4n+1}\left\{\frac{1}{z_{n,k}}+2(1+\cos\theta_{n,k})+z_{n,k}\right\}$$
$$=\frac{i}{3}\{2\cos\theta_{n,k}+2(1+\cos\theta_{n,k})\}$$
$$=\frac{2}{3}i(2\cos\theta_{n,k}+1)$$

$$\therefore\quad \frac{w_{n,k}}{i}=\frac{2}{3}(\cos\theta_{n,k}+1)$$

ここで問 3 より，$0<\dfrac{k-1}{2N_n}\pi\leqq\theta_{n,k}\leqq\dfrac{k}{2N_n}\pi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから,

$$\cos\frac{k}{2N_n}\pi\leqq\cos\theta_{n,k}\leqq\cos\frac{k-1}{2N_n}\pi$$

$$\frac{2}{3}\left(2\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right)\leqq\frac{w_{n,k}}{i}\leqq\frac{2}{3}\left(2\cos\frac{k-1}{2n}\pi+1\right)$$

各辺の和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(2\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{w_{n,k}}{i}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(2\cos\frac{k-1}{2n}\pi+1\right)$$

$$\therefore\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right)\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{w_{n,k}}{i}\leqq\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\cos\frac{k-1}{2n}\pi+1\right)$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right)=\int_0^1\left(2\cos\frac{\pi}{2}x+1\right)dx=\left[\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+x\right]_0^1=\frac{4}{\pi}+1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\cos\frac{k-1}{2n}\pi+1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right)=\int_0^1\left(2\cos\frac{\pi}{2}x+1\right)dx=\frac{4}{\pi}+1$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{w_{n,k}}{i}=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{\pi}+1\right)=\frac{2(\pi+4)}{3\pi}$$