解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2025年度　昭和大学（Ⅱ期）

【　講　評　】

例年通り，大問4題で出題された．昨年同様，小問集合は2題で，難易度に大きな変化はなかった．全体で70％の得点を目指したい．以下，大問ごとに特徴を述べる．

1　小問集合（複素数と方程式，複素数平面／数Ⅱ微分法・積分法）【やや易】

(1)は実数係数方程式の虚数解を処理し，求まった複素数に対してド・モアブルの定理による計算を行う問題である．(2)は x 切片や変曲点の条件から3次関数を確定し，定積分計算を行う（対称性を利用すると楽に解ける）．いずれも落とせない問題である．

2　小問集合（三角関数／図形と計量／数Ⅲ積分法／三角関数）【標準】

(1)は加法定理，(2)は三角形の形状決定，(3)は定積分計算，(4)は三角方程式の解の存在と，いずれも典型問題であった．(2)はやや式変形に苦戦するかもしれないが，得点しやすい問題が多かった．

3　数Ⅲ微分法／数Ⅲ積分法【標準】

(1)は接線・法線の方程式を求めるだけである．(2)は面積で，グラフは単純で定積分も標準的な計算量である．また，最後の最小値は，相加相乗で求めることができる．解答時間が不足していなければ，得点しやすい問題だろう．

4　場合の数・確率【標準】

Ⅰ期に続き，確率の最大値を求める問題であった．事象も複雑でなく，設問による誘導があり，計算も標準的であることから，ここも得点したい問題である．

【　解　答　】

1　(1)(1−1)　$a=-10$，$b=-2$　　(1−2)　-1

(2)(2−1)　$\alpha=-1$，$\beta=1$，$\gamma=3$，　(2−2)　$a=-3$，$b=-1$，　(2−3)　0

2　(1)　$\dfrac{3}{5}$，　(2)　「A を直角とする直角三角形」または「C と B が一致する二等辺三角形」

(3)　$-\dfrac{14}{15}$，　(4)(4−1)　$0\leqq y\leqq 2$，　(4−2)　$0\leqq a\leqq \dfrac{1}{2}$

3　(1)　l : $y=\dfrac{ae}{2}x+\dfrac{e}{2}$，　m : $y=-\dfrac{2}{ae}x+\dfrac{2}{a^2e}+e$，

(2)　$S(a)=\dfrac{e(e-1)^2}{4}a+\dfrac{1}{a}$，　$a=\dfrac{2}{\sqrt{e}\,(e-1)}$ のとき，最小値 $(e-1)\sqrt{e}$

4　(1)　$\dfrac{72}{425}$，　(2)　$\dfrac{(n-1)(52-n)}{4(14-n)(n+1)}$，　(3)　$p(3)<p(4)$，　(4)　$p(13)>p(14)$，　(5)　6

1 i は虚数単位とする．次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) a，b は実数とする．3 次方程式 $4x^3+ax^2+5x+b=0$ の 1 つの解が $\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$ であるとし，残りの解を β，γ とする．

(1−1) 実数 a，b の値を求めよ．

(1−2) $(\beta\gamma)^{2025}$ の値を求めよ．

(2) a，b は実数とする． $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ について，$y=f(x)$ のグラフは $x=\alpha$，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ で x 軸と交わる．また，$f(x)$ は $x=1$ に変曲点をもち，$\alpha+\beta=0$ を満たす．次の各問いに答えよ．

(2−1) α，β，γ の値を求めよ．

(2−2) 実数 a，b の値を求めよ．

(2−3) $\displaystyle\int_\alpha^\gamma f(x)dx$ を求めよ．

解説

(1) a，b は実数であるから，3 次方程式 $4x^3+ax^2+5x+b=0$ が $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$ を解に持つとき，残りの解の一方は $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}$ であり，もう一方は実数である．よって，$\beta=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}$，$\gamma$ を実数として考える．

解と係数の関係から，

$$\begin{cases}\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}+\gamma=-\dfrac{a}{4}\\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}\cdot\gamma+\gamma\cdot\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}=\dfrac{5}{4}\\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}\cdot\gamma=-\dfrac{b}{4}\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\gamma=-\dfrac{a}{4} & \cdots\cdots①\\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{5}{4} & \cdots\cdots②\\ \dfrac{\gamma}{4}=-\dfrac{b}{4} & \cdots\cdots③\end{cases}$$

② から $\gamma=2$ であり，これを ①，③ に代入すると，$\boldsymbol{a=-10}$，$\boldsymbol{b=-2}$

また，

$$\begin{aligned}(\beta\gamma)^{2025}&=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\cdot 2\right)^{2025}=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{2025}\\&=\cos\left(-\frac{2025}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2025}{3}\pi\right)=\cos(-675\pi)+i\sin(-675\pi)\\&=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=\boldsymbol{-1}\end{aligned}$$

(2) $y=f(x)$ のグラフが $x=\alpha$，β，γ で x 軸と交わることから，方程式 $f(x)=0$ は $x=\alpha$，β，γ を解に持つ．

解と係数の関係から，

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-a\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b\\ \alpha\beta\gamma=-3\end{cases}$$

$\alpha+\beta=0$ より，
$$\begin{cases}\gamma=-a & \cdots\cdots④\\ \alpha\beta=b & \cdots\cdots⑤\\ \alpha\beta\gamma=-3 & \cdots\cdots⑥\end{cases}$$

ここで， $f'(x)=3x^2+2ax+b$， $f''(x)=6x+2a$

$y=f(x)$ が $x=1$ に変曲点にもつことから， $f''(1)=6+2a=0$ $\quad\therefore\quad a=-3$ が必要である．

これと ④ から，　$\gamma=3$

⑥ に代入して，　$\alpha\beta=-1$

これを ⑤ に代入すると　$b=-1$

また，$\alpha\beta=-1$，$\alpha+\beta=0$ より，解と係数の関係から，α，β は $t^2-1=0$ の 2 解である．

これを解くと　$t=\pm1$　　$\therefore$　$\alpha=-1$，$\beta=1$ ($\because$ $\alpha<\beta$)

以上をまとめると，

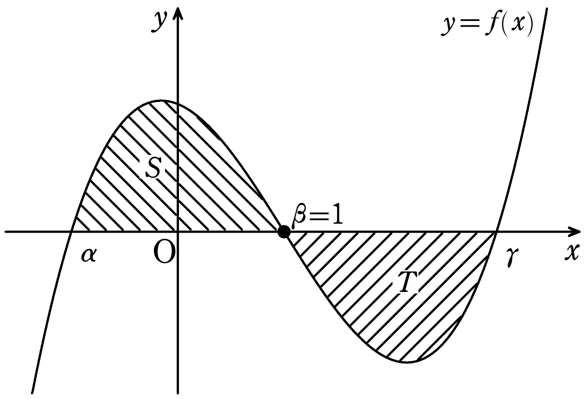
$\alpha=-1$，$\beta=1$，$\gamma=3$，$a=-3$，$b=-1$

であり，このとき確かに $f''(x)$ は $x=1$ の前後で符号変化する．

また，$\beta=1$ より，$y=f(x)$ は x 軸との交点で変曲点を持つ．

よって，右図の面積を S，T とすると，3 次関数のグラフの

変曲点に対する対称性から $S=T$ であり，



$$\begin{aligned}\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx&=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\gamma f(x)\,dx\\&=S+(-T)\\&=0\end{aligned}$$

別解　(2−3) の定積分は，対称性を用いずに計算すると，次のようになる．

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx&=\int_{-1}^3(x+1)(x-1)(x-3)\,dx=\int_{-1}^3(x+1)\{(x+1)-2\}(x-3)\,dx\\&=\int_{-1}^3\{(x+1)^2(x-3)-2(x+1)(x-3)\}\,dx\\&=-\frac{1}{12}(3+1)^4+2\cdot\frac{1}{6}(3+1)^3\\&=-\frac{4^3}{3}+\frac{4^3}{3}=0\end{aligned}$$

ただし，定積分の公式には，以下の公式を用いた．

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3,\quad\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

2 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$，$\tan\gamma=4$ とする．このとき $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ の値を求めよ．

(2) △ABCの3つの角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ の大きさをそれぞれ A，B，C とする． A，B，C について次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか**句読点を含め 50 文字以内で数式を用いずに簡潔に**説明せよ．

$$\sin A\sin B\cos B-\sin A\cos B\sin C-\sin B\sin C+1=\cos^2 C$$

(3) 次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x)(\sin 2x)(\tan x)dx$$

(4) 次の問いに答えよ．

(4−1) $f(x)=\sin x+\cos x$ について，$y=\{f(x)\}^2$ の値域を不等式で表せ．

(4−2) a は実数の定数とする．次の方程式を満たす実数 θ が存在するための a の範囲を不等式で表せ．

$$1+2\sin\theta\cos\theta-2a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-6a=0$$

解説

(1) 加法定理から，　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1$

再び加法定理から，

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{-1+4}{1-(-1)\cdot 4}=\frac{3}{5}$$

(2) $\sin A\sin B\cos B-\sin A\cos B\sin C-\sin B\sin C+1-\cos^2 C=0$

$1-\cos^2 C=\sin^2 C$ より，

$$\sin A\sin B\cos B-\sin A\cos B\sin C-\sin B\sin C+\sin^2 C=0$$

$$\sin^2 C-(\sin A\cos B+\sin B)\sin C+\sin A\sin B\cos B=0$$

$$(\sin C-\sin A\cos B)(\sin C-\sin B)=0$$

$$\therefore\quad \sin C=\sin A\cos B \quad または \quad \sin C=\sin B$$

$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とし，三角形ABCの外接円の半径を R とする．

(Ⅰ) $\sin C=\sin A\cos B$ のとき

正弦定理より　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$　　$\therefore$　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

余弦定理より　$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

これらを代入すると，

$$\frac{c}{2R}=\frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$2c^2=a^2+c^2-b^2 \qquad \therefore\quad c^2=a^2+b^2$$

(Ⅱ)　$\sin C=\sin B$ のとき

正弦定理により $\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$ が成り立つから，これらを代入して

$$\frac{b}{2R}=\frac{c}{2R} \qquad \therefore \quad b=c$$

以上(Ⅰ)，(Ⅱ)から △ABC は

「A を直角とする直角三角形」または「C と B が一致する二等辺三角形」

別解　正弦定理，余弦定理を用いずに三角関数を処理してもよい．

(Ⅰ)　$\sin C=\sin A\cos B$ のとき

$C=\pi-(A+B)$ より，

$$\sin(A+B)-\sin A\cos B=0$$

$$(\sin A\cos B-\cos A\sin B)-\sin A\cos B=0$$

$$\therefore \quad \cos A\sin B=0$$

$\sin B\fallingdotseq 0$ より，　$\cos A=0$　　$\therefore \quad A=\dfrac{\pi}{2}$ （$\because$ $0<A<\pi$）

(Ⅱ)　$\sin C-\sin B=0$ のとき

$\sin C=\sin B$ であり，$0<B<\pi$，$0<C<\pi$ であるから

$$C=B,\ \pi-B$$

となるが，後者は $B+C=\pi$ となり不適．

(Ⅰ)，(Ⅱ)から △ABC は

「A を直角とする直角三角形」または「C と B が一致する二等辺三角形」

(3)　$\tan x$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で定義されないから，本問は出題ミスと思われる．ただし，被積分関数を $\tan x$ がない形に変形すれば値を求めることができるため，以下そのときの解答を示す．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x)(\sin 2x)(\tan x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^3 x-3\cos x)\cdot 2\sin x\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(4\cos^2 x-3)\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1-4\sin^2 x)\sin^2 x\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin^2 x-4\sin^4 x)dx=2\left[\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{4}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)=-\frac{14}{15}$$

補足　和積変換を利用して積分計算できる形に変形してもよい．

$$\begin{aligned}\cos 3x\sin 2x\tan x&=\cos 3x\cdot 2\sin x\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=2\cos 3x\sin^2 x\\&=\cos 3x(1-\cos 2x)=\cos 3x-\cos 3x\cos 2x\\&=\cos 3x-\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)\end{aligned}$$

以下，定積分計算を行うだけである．

(4) (4−1)

$$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから， $-\sqrt{2}\leqq f(x)\leqq\sqrt{2}$

よって，$y=\{f(x)\}^2$ の値域は **$0\leqq y\leqq 2$**

(4−2) $t=f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta$ とすると， $t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ $\therefore$ $2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

また， $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}t$

これらを用いると方程式は

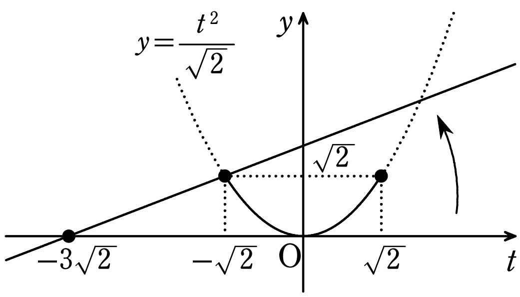
$$1+t^2-1-2a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}t-6a=0$$

$$t^2-\sqrt{2}at-6a=0 \quad \cdots\cdots①$$

(4−1) より $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ であるから， t の方程式①が $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲で実数解を持つときの a の範囲が求めるものである.

①を変形すると $t^2=\sqrt{2}a\left(t+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)$ $\therefore$ $\frac{t^2}{\sqrt{2}}=a(t+3\sqrt{2})$

2つのグラフ $\begin{cases} y=\dfrac{t^2}{\sqrt{2}} \\ y=a(t+3\sqrt{2}) \end{cases}$ が $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲に共有点をもつときの実数 a の範囲を求めれば良い.



直線 $y=a(t+3\sqrt{2})$ が $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ を通るとき

$$\sqrt{2}=a(2\sqrt{2}) \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{2}$$

右の図から，求める a の範囲は **$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$**

3

$a>0$ とする．$x \geqq 0$ における関数 $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ と，座標平面の曲線 C：$y=f(x)$ について，次の問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{a},\ f\left(\frac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ．また，P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C，直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ．また，$a>0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ．

解説

解答

(1) $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}e^{\sqrt{ax}}$ ……①

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=e$，$f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{ae}{2}$ であるから，接線 l の方程式は，

$$y=\frac{ae}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right)+e \qquad \therefore\quad l：\boldsymbol{y=\frac{ae}{2}x+\frac{e}{2}}$$

また，$f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{ae}{2}\neq 0$ より，法線 m の方程式は，

$$y=-\frac{2}{ae}\left(x-\frac{1}{a}\right)+e \qquad \therefore\quad m：\boldsymbol{y=-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e}$$

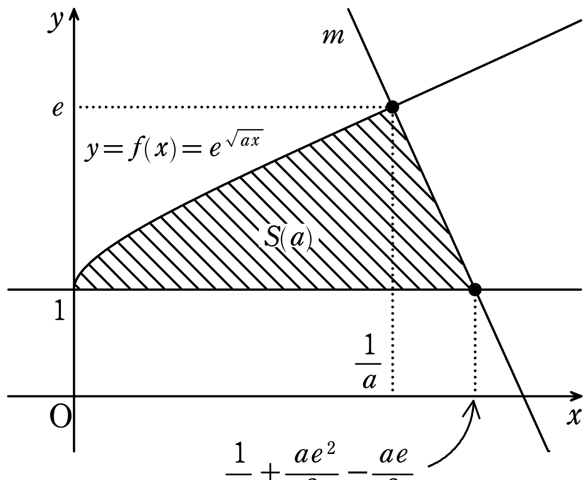
(2) ①と $a>0$ より $f'(x)>0$ であり，　$f(0)=1$

直線 m と $y=1$ の交点の x 座標は，

$$1=-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e$$

$$\frac{2}{ae}x=\frac{2}{a^2e}+e-1 \qquad \therefore\quad x=\frac{1}{a}+\frac{ae^2}{2}-\frac{ae}{2}$$

また，直線 m の傾きが負であることから，$S(a)$ は右図の斜線部である．



$$S(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}f(x)dx-\frac{1}{a}\cdot 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{ae^2}{2}-\frac{ae}{2}-\frac{1}{a}\right)(e-1)$$
$$=\int_0^{\frac{1}{a}}e^{\sqrt{ax}}dx-\frac{1}{a}+\frac{e(e-1)^2}{4}a$$

ここで，$\sqrt{ax}=t$ とおくと $ax=t^2$ より，　$adx=2tdt$ 　$\therefore\quad dx=\dfrac{2t}{a}dt$

よって，

$$\int_0^{\frac{1}{a}}e^{\sqrt{ax}}dx=\int_0^1 e^t\cdot\frac{2t}{a}dt=\frac{2}{a}\int_0^1 te^t dt$$
$$=\frac{2}{a}\Big[te^t\Big]_0^1-\frac{2}{a}\int_0^1 e^t dt=\frac{2e}{a}-\frac{2}{a}\Big[e^t\Big]_0^1=\frac{2}{a}$$

以上から，

$$S(a)=\frac{2}{a}-\frac{1}{a}+\frac{e(e-1)^2}{4}=\boldsymbol{\frac{e(e-1)^2}{4}a+\frac{1}{a}}$$

$a>0$ より $\dfrac{e(e-1)^2}{4}a>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ であるから，相加相乗平均の不等式より，

$$S(a) \geqq 2\sqrt{\frac{e(e-1)^2}{4}a\cdot\frac{1}{a}} = \sqrt{e}\,(e-1)$$

等号は

$$\frac{e(e-1)^2}{4}a = \frac{1}{a} \iff a^2 = \frac{4}{e(e-1)^2} \qquad \therefore\ a = \frac{2}{\sqrt{e}\,(e-1)} \quad (\because\ a>0)$$

のときに成立する．

よって，$a>0$ における $S(a)$ の最小値は，$a = \dfrac{2}{\sqrt{e}\,(e-1)}$ のとき，$\sqrt{e}\,(e-1)$

4 ジョーカーを除く52枚1組のトランプ（スペード，ハート，クラブ，ダイヤの4種の絵柄の1つと，1から13の番号の1つが，それぞれ重複なく割り当てられた合計52枚のカード）がある．この中から無作為に n 枚のカードを選ぶ．2枚だけが同じ数字で残りがすべて異なる数字である確率を $p(n)$ とする．ただし $n \geqq 3$ とする．次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) $p(3)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{p(n)}{p(n+1)}$ を求めよ．ただし $3 \leqq n \leqq 13$ とする．

(3) $p(3)$ と $p(4)$ はどちらが大きいか．適切な不等号を解答欄に記入せよ．

(4) $p(13)$ と $p(14)$ はどちらが大きいか．適切な不等号を解答欄に記入せよ．

(5) $p(n)$ が最大となるときの n を求めよ．

解説

まず，$p(n)$ を求める．

各絵柄のカードは13枚ずつあるから，$15 \leqq n$ のとき $p(n)=0$ である．

よって，$3 \leqq n \leqq 14$ とする．

同じになる数字の選び方は ${}_{13}\mathrm{C}_1$ 通りで，それら2枚の絵柄の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，他の $n-2$ 枚のカードの数字の選び方は ${}_{12}\mathrm{C}_{n-2}$ 通りで，それら $n-2$ 枚の絵柄の選び方は 4^{n-2} であるから，

$$p(n)=\frac{{}_{13}\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_{12}\mathrm{C}_{n-2}\cdot 4^{n-2}}{{}_{52}\mathrm{C}_n}=\frac{13\cdot 6\cdot {}_{12}\mathrm{C}_{n-2}\cdot 4^{n-2}}{{}_{52}\mathrm{C}_n} \quad \cdots\cdots ①$$

(1) ①より，

$$p(3)=\frac{13\cdot 6\cdot {}_{12}C_1\cdot 4^1}{{}_{52}C_3}=\frac{13\cdot 6\cdot 12\cdot 4}{\frac{52\cdot 51\cdot 50}{3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{13\cdot 6\cdot 12\cdot 4}{26\cdot 17\cdot 50}=\frac{3\cdot 12\cdot 4}{17\cdot 50}=\frac{3\cdot 12\cdot 2}{17\cdot 25}=\mathbf{\frac{72}{425}}$$

(2) ①より，$2 \leqq n \leqq 13$ において，

$$\frac{p(n)}{p(n+1)}=\frac{\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_{n-2}\cdot 4^{n-2}}{{}_{52}\mathrm{C}_n}}{\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_{n-1}\cdot 4^{n-1}}{{}_{52}C_{n+1}}}=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_{n-2}\cdot {}_{52}\mathrm{C}_{n+1}}{4\cdot {}_{12}\mathrm{C}_{n-1}\cdot {}_{52}\mathrm{C}_n}=\frac{\dfrac{12!}{(14-n)!(n-2)!}\cdot\dfrac{52!}{(51-n)!(n+1)!}}{4\cdot\dfrac{12!}{(13-n)!(n-1)!}\cdot\dfrac{52!}{(52-n)!\,n!}}$$

$$=\frac{(13-n)!(n-1)!(52-n)!\,n!}{4(14-n)!(n-2)!(51-n)!(n+1)!}=\mathbf{\frac{(n-1)(52-n)}{4(14-n)(n+1)}}$$

(3) (2) の式で $n=3$ とすると

$$\frac{p(3)}{p(4)}=\frac{2\cdot 49}{4\cdot 11\cdot 4}=\frac{49}{88}<1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{p(3)<p(4)}$$

(4) (2) の式で $n=13$ とすると

$$\frac{p(13)}{p(14)}=\frac{12\cdot 39}{4\cdot 1\cdot 14}=\frac{117}{14}>1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{p(13)>p(14)}$$

(5) (2) より，$2 \leqq n \leqq 13$ において，

$$\frac{p(n)}{p(n+1)} \geqq 1 \iff \frac{(n-1)(52-n)}{4(14-n)(n+1)} \geqq 1 \iff (n-1)(52-n) \geqq 4(14-n)(n+1)$$

$$\iff 3n^2+n \geqq 108 \iff n(3n+1) > 108$$

$n(3n+1)$ は n について単調増加で，

$$6\cdot(3\cdot6+1)=114>108,\quad 5\cdot(3\cdot5+1)=80<108$$

であるから，

$1 \leqq n \leqq 5$ のとき　$p(n) < p(n+1)$

$6 \leqq n \leqq 13$ のとき　$p(n) > p(n+1)$

が成り立つ．

よって，

$p(1) < p(2) < \cdots < p(5) < p(6) > p(7) > \cdots > p(13) > p(14)$　……②

であるから，$p(n)$ が最大となるときの n は，　$n=\mathbf{6}$

$\boxed{\text{補足}}$

(3)，(4) より先に (5) を解いてしまえば，② より

(3)　$p(3) < p(4)$

(4)　$p(13) > p(14)$

がわかる．