2025年度　東京大学（文科）

【　講　評　】

例年通り，大問4題での出題であった．昨年同様，頻出である通過領域や整数問題の出題がなく，微分法，積分法の出題割合が高かった．標準的な難易度である大問1，大問3，大問4のうち2問を完答し，残りは部分点を稼ぎたい．

１．微分法（法線）／式と証明（相加・相乗平均の不等式）【標準】

(1) は法線と曲線の交点を求めるだけであるから，ミスなく解きたい．(2) は素直に交点を求めようとすると計算が煩雑化するので，(1) で求めた交点の x 座標を文字でおいて処理できるかがポイントとなる．また，最小値を求めるときの増減が適切に把握できたかもポイントであった．

２．図形と計量【やや難】

(1)，(2) は具体的に図を描いて考えれば解けるだろう．(3) は (1)，(2) をヒントに，何パターンの図が考えられるかを見抜けるかがポイントとなる．ここは記述の難しさもあり，完答は難しいだろう．

３．場合の数・確率／数列（確率と漸化式）【標準】

漸化式を用いて確率を求める典型問題である．東大受験者であれば，十分に対策ができていたのではないだろうか．漸化式も複雑でないため，この問題は完答したい．

４．積分法（面積）【標準】

放物線と，絶対値がついた2次関数のグラフで囲まれた部分の面積の最大値を求める問題であった．最大値を求めることが最終目的であるため，グラフを動かしたときの面積の増減が把握できると，計算量を少なくできて解きやすい．ただ，すべての場合の面積を地道に求めてもそれほど大変ではないので，しっかりと時間を割いて完答したい問題である．

【　解　説　】

第１問

　a を正の実数とする．座標平面において，放物線 C： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を ℓ とおく．ℓ と C の交点のうち，P と異なる点を Q とおく．

(1)　Q の x 座標を求めよ．

　Q における C の接線と直交し，Q を通る直線を m とおく． m と C の交点のうち，Q と異なる点を R とおく．

(2)　a がすべての正の次数を動くとき， R の x 座標の最小値を求めよ．

解説

(1)　$y=x^2$ について　$y'=2x$

$a\fallingdotseq 0$ より，l の方程式は

$$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)\qquad\therefore\quad y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

これと $y=x^2$ を連立させて

$$x^2=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)=0$$

$x\fallingdotseq a$ のとき　$x=-a-\dfrac{1}{2a}$

よって，点 Q の x 座標は　$\boldsymbol{x=-a-\dfrac{1}{2a}}$

(2)　$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とすると，(1) より $a>0$ であるから，

$$q=-a-\frac{1}{2a}=-\left(a+\frac{1}{2a}\right)\leqq-2\sqrt{a\cdot\frac{1}{2a}}=-\sqrt{2}$$

等号は $a=\dfrac{1}{2a}$ かつ $a>0$，すなわち $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で成り立つから　$q\leqq-\sqrt{2}$　……①

また，$\mathrm{R}(r,\ r^2)$ とすると，(1) の議論は $a<0$ でも成立することから，a を q に変えて　$r=-q-\dfrac{1}{2q}$　……②

$-q=s$ とおくと， $s=-q\geqq\sqrt{2}$ であり，

$$r=s+\frac{1}{2s}=\left(\sqrt{s}-\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)^2+\sqrt{2}$$

$s\geqq\sqrt{2}$ において $\sqrt{s}-\dfrac{1}{\sqrt{2s}}>0$ であり，s について単調増加であるから， r が最小となるのは $s=\sqrt{2}$ のときで，その最小値は

$$r=\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{4}}$$

別解　r の最小値は次のように求めることもできる.

② より　$2rq=-2q^2-1$　　$\therefore$　$2q^2+2rq+1=0$　……③

q の方程式 ③ が ① の範囲で少なくとも 1 つ実数解をもつときの，実数 r のとり得る範囲が求めるものである.

③ の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=r^2-2$

また，③ の左辺を $f(q)$ とおくと　$f(q)=2\left(q+\dfrac{r}{2}\right)^2-\dfrac{r^2}{2}+1$

(ⅰ) $-\dfrac{r}{2}\leqq-\sqrt{2}$，すなわち $r\geqq2\sqrt{2}$ のとき

① の範囲で実数解をもつのは図 1 より　$\dfrac{D}{4}\geqq0$　$\Leftrightarrow$　$r^2-2\geqq0$

$r\geqq2\sqrt{2}$ でこれは常に成り立つ.

(ⅱ)　$-\sqrt{2}<-\dfrac{r}{2}$，すなわち $r<2\sqrt{2}$ のとき

① の範囲で実数解をもつのは図 2 より

$$f(-\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}r+1\leqq0 \qquad \therefore \quad r\geqq\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$r<2\sqrt{2}$ であるから　$\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\leqq r<2\sqrt{2}$

図 1

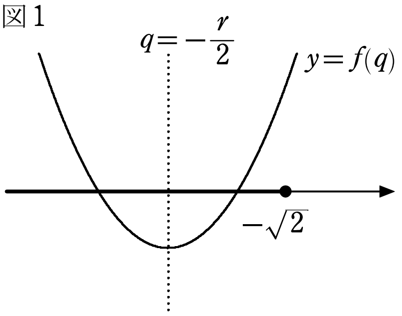
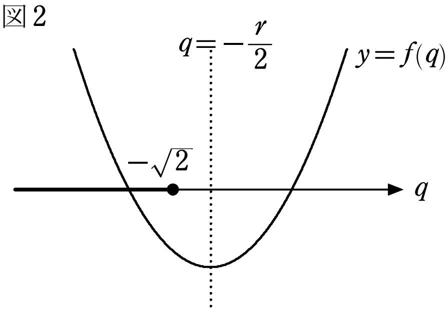


図 2



(ⅰ), (ⅱ) より，r のとり得る値の範囲は　$\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\leqq r$

したがって，R の x 座標 r の最小値は　$\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

第２問

平面上で AB＝AC＝1 である二等辺三角形 ABC を考える．正の実数 r に対し，A，B，C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つを合わせた領域を D_r とする．ただし，この問いでは，三角形と円は周とその内部からなるものとする．辺 AB，AC，BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s，三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す．

(1)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ．

(2)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ．

(3)　$0<\theta<\pi$ を満たす θ に対して，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ のとき，s と t を θ を用いて表せ．

（解説）

△ABC の外心を O とする．

(1)

図 1

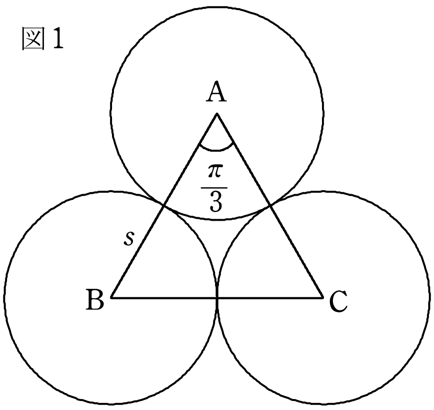
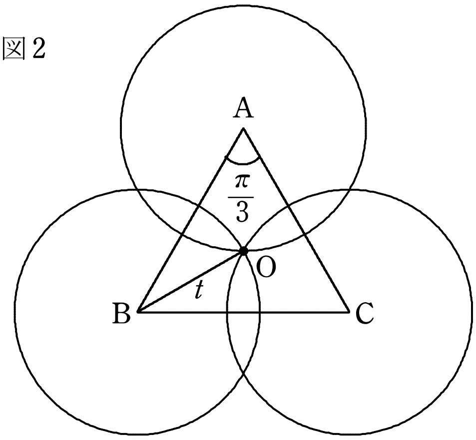


図 2



$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，AB＝AC＝1 より三角形 ABC は正三角形である．

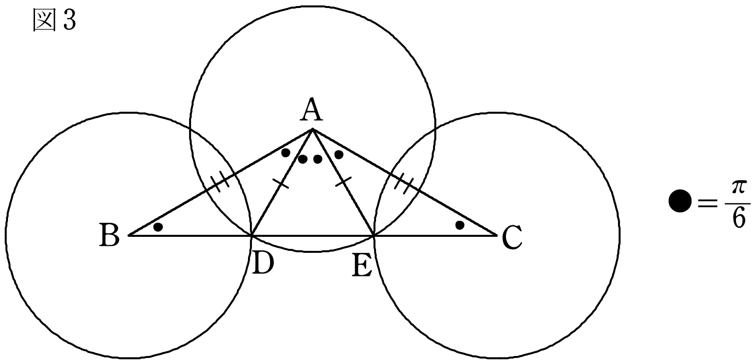
s は 3 つの円が互いに外接するとき（図１）の半径であるから　$s=\dfrac{1}{2}$

また，t は 3 つの円が三角形 ABC の外心 O を通るとき（図２）の半径であるから，正弦定理により，

$$t=\frac{1}{2\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，図 3 から $s=t$ である．

図 3



$\angle ABC=\dfrac{\pi}{6}$ であるから，　$BC=2AB\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

三角形 ADE は一片の長さが s の正三角形で，$DA=DB=s$，$EA=EC=s$ であるから，

$BC=BC+DE+EC$ より

$$\sqrt{3}=s+s+s \qquad \therefore\ s=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，　$s=t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) A から辺 BC へ垂線 AH を下ろすと，$AB=AC=1$ より $\angle ABC=\dfrac{\pi-\theta}{2}$ であるから，

$$AH=AB\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2},\ BH=AB\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)=\sin\frac{\theta}{2}$$

まず，三角形 ABC のすべての辺が D_r に含まれるときについて考える．

(ア) $AH>BH \iff 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

このとき，各辺上の任意の点について，元も近い頂点のうちの 1 つは辺の端点のいずれかとなる．

(i) $AB>BC \iff 0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$s=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}$$

(ii) $AB\leqq BC \iff \dfrac{\pi}{3}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

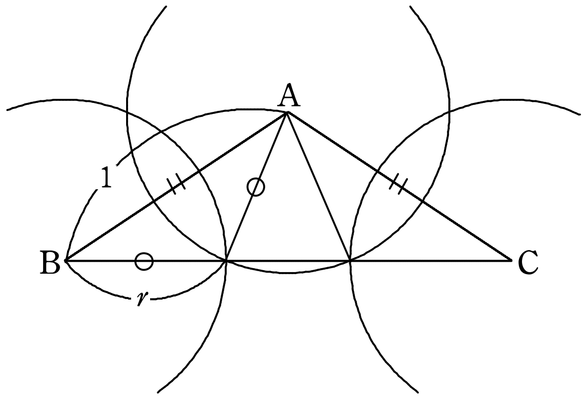
$$s=\frac{BC}{2}=BH=\sin\frac{\theta}{2}$$

(イ) $AH\leqq BH \iff \dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$ のとき

このとき，BC 上の点であって，A，B，C のうち最も近い点が A となる点があることに注意すると，辺 BC が D_r に含まれるのは，

$$2r\cos\angle ABC\geqq AB=1$$

のときであり，このとき明らかに AB，AC は D_r に含まれる．



よって，　$s=\dfrac{1}{2\cos\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}\right)}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$

(ア)，(イ) をまとめると

$$s=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)\\ \sin\dfrac{\theta}{2} & \left(\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}} & \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi\right)\end{cases}$$

次に，三角形ABCが D_r に含まれるときについて考える．

(ウ)　三角形ABCの外心Oが三角形ABCの周上及び内部　$\Longleftrightarrow$　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

t は3つの円が三角形ABCの外心Oを通るときであるから，

$$t=\frac{\mathrm{AC}}{2\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{1}{2\sin\left(\dfrac{\pi-\theta}{2}\right)}=\frac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$$

(エ)　三角形ABCの外心が三角形ABCの外部　$\Longleftrightarrow$　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

(イ)のときで $s=t$ であるから　$t=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$

(ウ)，(エ)をまとめると　$t=\begin{cases}\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} & \left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)\\[2ex] \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}} & \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)\end{cases}$

第３問

白玉２個が横に並んでいる．投げたとき表と裏のでる確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを用いて，次の手順(*)を繰り返し，白玉または黒玉を横一列に並べていく．

手順(*)　コインを投げ，表がでたら白玉，裏がでたら黒玉を，それまでに並べられている一番右にある玉の右隣りにおく．そして，新しくおいた玉の色がその１つ左の玉の色と異なり，かつ２つ左の玉の色と一致するときには，新しくおいた玉の１つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる．

例えば，手順(*)を２回行いコインが裏，表の順にでた場合には，白玉が４つ並ぶ．正の整数 n に対して，手順(*)を n 回行った時点での $(n+2)$ 個の玉の並び方を考える．

(1)　$n=3$ のとき，右から２番目の玉が白玉である確率を求めよ．

(2)　n を正の整数とする．右から２番目の玉が白玉である確率を求めよ．

(3)　n を正の整数とする．右から１番目と２番目の玉がともに白玉である確率を求めよ．

白玉を○，黒玉を●と表す．

手順(*)を n 回行った時点での $(n+2)$ 個の玉の並び方について，右から２番目と１番目の玉の並びが

○○のときの確率を p_n,

○●のときの確率を q_n,

●○のときの確率を r_n,

●●のときの確率を s_n

とする．手順(*)を行う前の並びは○○であるから，$p_0=1$，$q_0=r_0=s_0=0$ と定義する．

手順(*)を n 回行った状態から，$n+1$ 回目を行ったときの右から２番目と１番目の玉の並びは，

○○（確率 p_n）から○○（確率 p_{n+1}）または○●（確率 q_{n+1}）となる確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$,

○●（確率 q_n）から○○（確率 p_{n+1}）または●●（確率 s_{n+1}）となる確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$,

●○（確率 r_n）から○○（確率 p_{n+1}）または●●（確率 s_{n+1}）となる確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$,

●●（確率 s_n）から●○（確率 r_{n+1}）または●●（確率 s_{n+1}）となる確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$

であるから，次の漸化式が成り立つ．

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{2}r_n & \cdots\cdots① \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n & \cdots\cdots② \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{2}s_n & \cdots\cdots③ \\ s_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{2}r_n+\dfrac{1}{2}s_n & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

①－④ より　$p_{n+1}-s_{n+1}=\dfrac{1}{2}(p_n-s_n)$

$\{p_n-s_n\}$ は等比数列であるから，　$p_n-s_n=(p_0-s_0)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　$\cdots\cdots⑤$

また，①＋④ より　$p_{n+1}+s_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+q_n+r_n+\dfrac{1}{2}s_n=\dfrac{1}{2}(p_n+s_n)+q_n+r_n$

$p_n+q_n+r_n+s_n=1$ より $q_n+r_n=1-(p_n+s_n)$ であるから，

$$p_{n+1}+s_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n+s_n)+1-(p_n+s_n)=-\frac{1}{2}(p_n+s_n)+1$$

これを変形すると

$$p_{n+1}+s_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n+s_n-\frac{2}{3}\right)$$

$\left\{p_n+s_n-\frac{2}{3}\right\}$ は等比数列であるから，

$$p_n+s_n-\frac{2}{3}=\left(p_0+s_0-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots⑥$$

$(⑤+⑥)\times\frac{1}{2}$ より　$p_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}\right\}$　……⑦

$(⑤-⑥)\times\frac{1}{2}$ より　$s_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2}{3}\right\}$　……⑧

よって，② より

$$\begin{aligned}p_n+q_n&=p_n+\frac{1}{2}p_{n-1}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}\right\}+\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\right\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots⑨\end{aligned}$$

(1)　求める確率は p_3+q_3 であるから，⑨ より　$p_3+q_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{5}{8}}$

(2)　求める確率は p_n+q_n であるから，⑨ より　$p_n+q_n=\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}}$

(3)　求める確率は p_n であるから，⑦ より　$p_n=\mathbf{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}\right\}}$

参考　漸化式 ① ～ ④ は，次のように処理することもできる．

①－②－③＋④ より

$$p_{n+1}-q_{n+1}+r_{n+1}-s_{n+1}=0 \qquad \therefore \quad p_n-q_n+r_n-s_n=0$$

①－2×②－2×③＋④ より

$$\begin{aligned}p_{n+1}-2q_{n+1}-2r_{n+1}+s_{n+1}&=\left(\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n\right)-p_n-s_n+\left(\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{2}s_n\right)\\&=-\frac{1}{2}(p_n-2q_n-2r_n+s_n)\end{aligned}$$

$\{p_n-2q_n-2r_n+s_n\}$ は等比数列であるから

$$p_n-2q_n-2r_n+s_n=(p_0-2q_0-2r_0+s_0)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

これらと ⑤ を用いて，p_n+q_n や p_n を求めてもよい．

第４問

a を実数とする．座標平面において，次の連立不等式の表す領域の面積を $S(a)$ とする．

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+2 \\ y \geqq |x^2+a| \\ -1 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

a が $-2 \leqq a < 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ．

C：$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$，D：$y=|x^2+a|$ とする．

D について，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，

$a>0$ のとき，$y=|x^2+a|=x^2+a$ は a について単調増加,

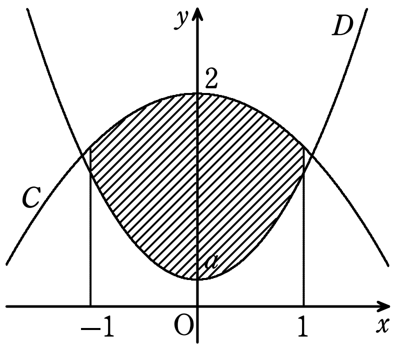
$a<-1$ のとき，$y=|x^2+a|=-(x^2+a)$ は a について単調減少

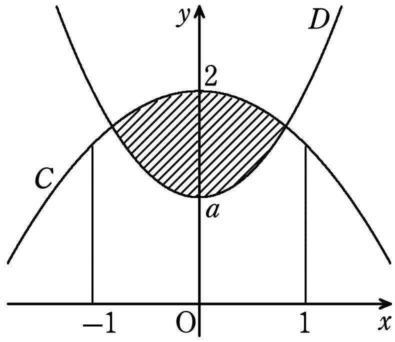
であり，

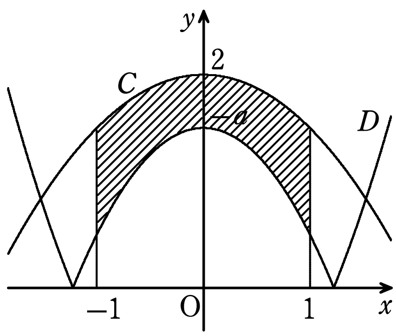
a が増加しているとき，$S(a)$ は減少または変化しない,

a が減少しているとき，$S(a)$ は増加または変化しない

となるから，$S(a)$ の最大については $-1 \leqq a \leqq 0$ のときのみ考えればよいから，以下この範囲で考える．







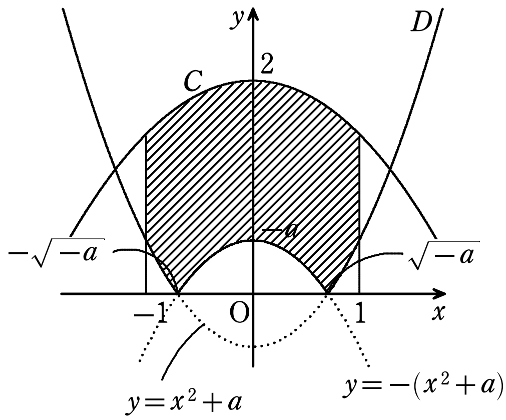
$|x^2+a|=0$ のとき　$x^2+a=0$　　$\therefore$　$x=\pm\sqrt{-a}$

$-1 \leqq x \leqq 1$ において,

放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+1$ と $y=x^2+a$ で囲まれた部分の面積を S_1,

放物線 $y=-x^2-a$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2

とすると,



$$\begin{aligned} S(a) &= S_1-2S_2 \\ &= \int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)-(x^2+a)\right\}dx-2\int_{-\sqrt{-a}}^{\sqrt{-a}}(-x^2-a)\,dx \\ &= \int_0^1(-3x^2-2a+4)\,dx-\frac{1}{3}(\sqrt{-a}+\sqrt{-a})^3 \\ &= \Big[-x^3-2(a-2)x\Big]_0^1-\frac{8}{3}(\sqrt{-a})^3 \\ &= -\frac{8}{3}(\sqrt{-a})^3-2a+3 \\ &= -\frac{8}{3}(\sqrt{-a})^3+2(\sqrt{-a})^2+3 \end{aligned}$$

$\sqrt{-a}=t$ とおくと，$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき $0 \leqq t \leqq 1$ であり,

$$S(a)=-\frac{8}{3}t^3+2t^2+3$$

これを $f(t)$ とおくと

$$f'(t)=-8t^2+4t=-4t(2t-1)$$

$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減は次のようになる．

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大で，このとき

$$\sqrt{-a}=\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad a=-\frac{1}{4}$$

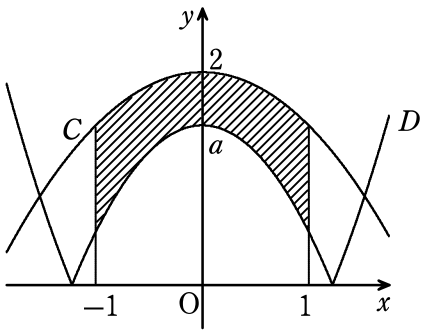
以上より，$S(a)$ の最大値は

$$S\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+3=\frac{19}{6}$$

補足　$-1\leqq a\leqq 0$ 以外のときの面積を具体的に求めると，次のようになる．

（i）$-2<a<-1$ のとき

$S(a)$ は右図の斜線部分の面積であるから

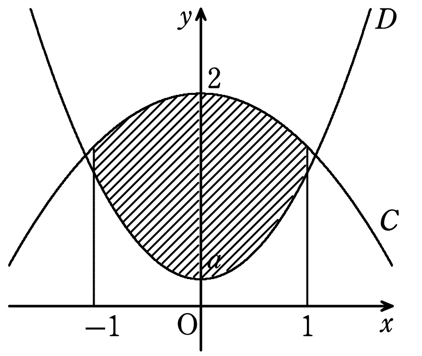


$$S(a)=\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)-(-x^2-a)\right\}dx$$
$$=2\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2+a+2\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2(a+2)x\right]_0^1=2a+\frac{13}{3}$$

これは $-2<a<-1$ において単調増加である．

（ii）$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

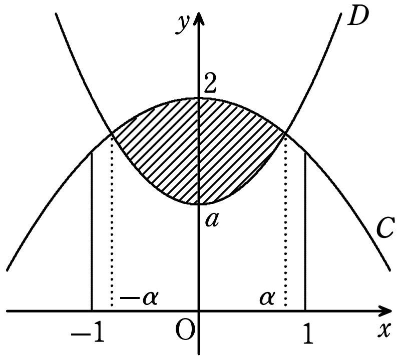
$S(a)$ は右図の斜線部分の面積であるから



$$S(a)=\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)-(x^2+a)\right\}dx$$
$$=2\int_0^1\left(-\frac{3}{2}x^2+2-a\right)dx$$
$$=\left[-x^3+2(2-a)x\right]_0^1$$
$$=-2a+3$$

これは $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ において単調減少である．

(iii) $\dfrac{1}{2}<a<2$ のとき



$S(a)$ は右図の斜線部分の面積である.

$y=x^2+a$, $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$ を連立させて

$$x^2+a=-\frac{1}{2}x^2+2$$

$$x^2=\frac{2(2-a)}{3} \qquad \therefore \quad x=\pm\sqrt{\frac{2(2-a)}{3}}$$

$\alpha=\sqrt{\dfrac{2(2-a)}{3}}$ とおくと, $0<\alpha<1$ であり,

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)-(x^2+a)\right\}dx=-\frac{3}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}(x-\alpha)(x+\alpha)\,dx\\&=\frac{1}{4}(\alpha+\alpha)^3=2\alpha^3\\&=2\sqrt{\left\{\frac{2(2-a)}{3}\right\}^3}\end{aligned}$$

これは $\dfrac{1}{2}<a<2$ において単調減少である.