解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2025年度　東京大学（理科）

【　講　評　】

例年通り，大問6題での出題であった．出題分野は微分法・積分法，場合の数，整数の性質と例年通りであった一方で，空間図形に関する出題がなかった．第1問は完答し，第2問，第3問，第4問，第6問の中から2問を完答し，残りは部分点を稼げるとよいだろう．

１．数学Ⅲ微分法・積分法【やや易】

座標平面内の正方形について，辺上の内分点の軌跡に関する面積，曲線の長さを求める問題であった．解法で迷うこともなく，計算量も少ないため，この問題は落とせない．

２．数学Ⅲ微分法・積分法【標準】

定積分で表された数列の極限を求める問題であった．(1) の不等式証明は問題ないだろう．(2) は定積分計算ができないので，はさみうちの原理を用いることになるが，(1) を用いて上からの評価を行い，相加・相乗平均の不等式などで下からの評価を行うだけである．頻出テーマであることからも，完答できた人は多いのではないだろうか．

３．三角関数【標準】

平行四辺形に外接する長方形の面積の最大値を求める問題である．やや計算は煩雑であるが，変数 θ が与えられているため，面積や最大値自体を求められた人は少なくないだろう．θ の定義域を定める部分をしっかりと記述したい．

４．整数の性質【標準】

多項式が平方数となる場合を考える問題である．(1) は背理法を用いれば，容易に示せるだろう．(2) は平方数となる場合を典型的な式変形により考察することになるが，(ⅰ)$\Longrightarrow$(ⅱ) の証明が少しやりづらかったかもしれない．

５．場合の数【やや難】

漸化式を用いて場合の数を求める頻出問題である．3項間漸化式を満たすことが与えられているため，正解を書けた人は多いかもしれないが，記述の仕方が難しく完答しづらい．これは部分点を狙いたい．

６．いろいろな曲線（複素数平面，2次曲線）【標準】

(1) は典型問題で，(2) は (1) で示したことを用いるだけなので，ここまでは確実に得点したい．(3) の最大値，最小値はやや求めづらいが，時間をかけることができれば得点できるだろう．

【 解 説 】

第１問

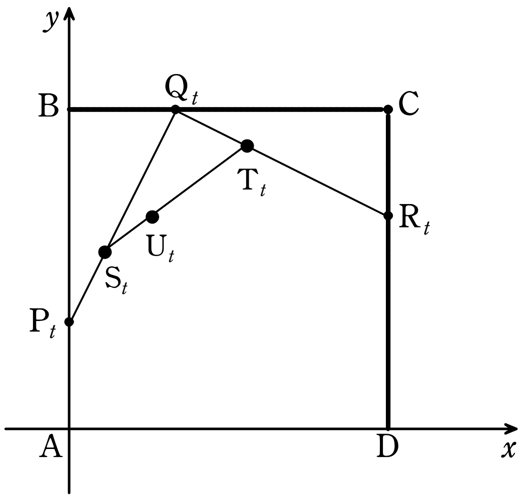
座標平面上の点 $A(0,\ 0)$，$B(0,\ 1)$，$C(1,\ 1)$，$D(1,\ 0)$ を考える．実数 $0<t<1$ に対して，線分 AB, BC, CD を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t，R_t とし，線分 P_tQ_t，Q_tR_t を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t，T_t とする．さらに，線分 S_tT_t を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とする．また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする．

(1) 点 U_t の座標を求めよ．

(2) t が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) a を $0<a<1$ を満たす実数とする．t が $0\leqq t\leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ．

解説

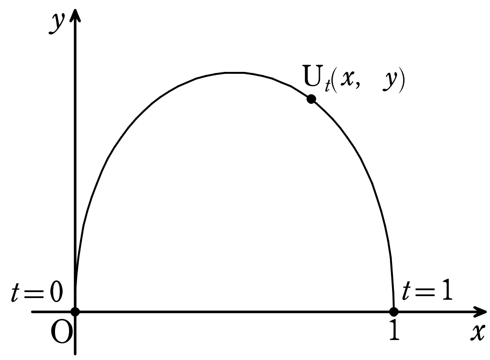


(1) $AP_t : P_tB = BQ_t : Q_tC = CR_t : R_tD = P_tS_t : S_tQ_t = Q_tT_t : T_tR_t = S_tU_t : U_tT_t = t : 1-t$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OU_t} &= (1-t)\overrightarrow{OS_t} + t\overrightarrow{OT_t} \\
&= (1-t)\left\{(1-t)\overrightarrow{OP_t} + t\overrightarrow{OQ_t}\right\} + t\left\{(1-t)\overrightarrow{OQ_t} + t\overrightarrow{OR_t}\right\} \\
&= (1-t)^2\overrightarrow{OP_t} + 2t(1-t)\overrightarrow{OQ_t} + t^2\overrightarrow{OR_t} \\
&= (1-t)^2(0,\ t) + 2t(1-t)(t,\ 1) + t^2(1,\ 1-t) \\
&= (3t^2-2t^3,\ -3t^2+3t)
\end{aligned}
$$

よって，点 Q_t の座標は　$\boldsymbol{(3t^2-2t^3,\ -3t^2+3t)}$

(2) $U_t(x,\ y)$ とすると，(1) より $\begin{cases} x=3t^2-2t^3 \\ y=-3t^2+3t \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$



このとき，

$$\frac{dx}{dt} = 6t-6t^2 = 6t(1-t) \geqq 0,$$

$$y = 3t(1-t) \geqq 0$$

であるから，求める面積は

$$S=\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 (-3t^2+3t)\ dx$$

$\dfrac{dx}{dt}=6t(1-t)$ より　$dx=6t(1-t)\,dt$,

x	$0 \to 1$
t	$0 \to 1$

よって,

$$S=\int_0^1(-3t^2+3t)\cdot 6t(1-t)\,dt=18\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt$$
$$=18\int_0^1(t^2-2t^3+t^4)\,dt$$
$$=18\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1$$
$$=18\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

(3)　(2) より　$\dfrac{dx}{dt}=6t(1-t)$

また,　$\dfrac{dy}{dt}=-6t+3=3(1-2t)$

よって,　$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=6t^2(1-t)^2+9(1-2t)^2$
$$=9(4t^4-8t^3+8t^2-4t+1)$$
$$=9(2t^2-2t+1)^2$$

したがって，求める曲線の長さは

$$\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^a\sqrt{9(2t^2-2t+1)^2}\,dt$$
$$=3\int_0^a(2t^2-2t+1)\,dt\quad\left(\because\ 2t^2-2t+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0\right)$$
$$=3\left[\frac{2}{3}t^3-t^2+t\right]_0^a$$
$$=\boldsymbol{2a^3-3a^2+3a}$$

第２問

⑴　$x>0$ のとき，不等式 $\log x \leqq x-1$ を示せ.

⑵　次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$$

解説

⑴　$f(x)=x-(1+\log x)\ (x>0)$ とおくと　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$f(x)$ の $x>0$ における増減は次のようになる.

x	0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(x)$ は $x=1$ において最小値をとるから，　$f(x)\geqq f(1)=0$

よって，$x-1\geqq \log x$ は成り立つ.

⑵　$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$1\leqq x^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$　　$\therefore$　$0<\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}$

よって，⑴ の不等式により　$\log\left(\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq \dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}-1=\dfrac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$

両辺を $1\leqq x\leqq 2$ で定積分すると

$$\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx\leqq\int_1^2\frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}-x\right]_1^2=\frac{1}{2}\left\{\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{n+1}{n}}-1\right)-1\right\}$$

$n>0$ であるから

$$n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx\leqq\frac{n}{2}\left\{\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{n+1}{n}}-1\right)-1\right\}\quad\cdots\cdots①$$

また，$x^{\frac{1}{n}}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式により，

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\geqq\log\sqrt{1\cdot x^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2n}\log x\quad\cdots\cdots②$$

が成り立ち，両辺を $1\leqq x\leqq 2$ で定積分すると

$$\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx\geqq\int_1^2\frac{1}{2n}\log x\,dx=\frac{1}{2n}\Big[x\log x-x\Big]_1^2=\frac{2\log 2-1}{2n}$$

$$\therefore\quad n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx\geqq\frac{2\log 2-1}{2}=\log 2-\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots③$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{n+1}{n}}-1\right)-1\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{\frac{n}{n+1}\left(2\cdot 2^{\frac{1}{n}}-1\right)-1\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2n}{n+1}\cdot 2^{\frac{1}{n}}-\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{\frac{2n}{n+1}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)-\frac{1}{n+1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right\}$$

$$=\log 2-\frac{1}{2}$$

①, ② より，はさみうちの原理により， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=\boldsymbol{\log 2-\frac{1}{2}}$

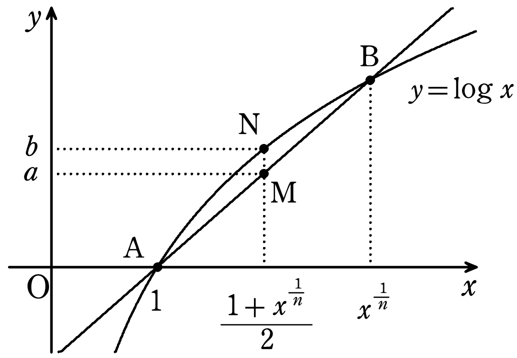
別解　不等式②は，次のように導くこともできる.

$g(x)=\log x\ (x>0)$ とおく.

$1\leqq x\leqq 2$ のとき，$\mathrm{A}(1,\ g(0))$，$\mathrm{B}\left(x^{\frac{1}{n}},\ g\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right)$ とすると，
線分 AB の中点は

$$\mathrm{M}\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2},\ \frac{g(0)+g\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{2}\right)$$

また，$\mathrm{N}\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2},\ g\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\right)$ とすると， $y=g(x)$ は上に凸であることから，(N の y 座標)$\geqq$(M の y 座標) が成り立つから



$$a=\frac{\log 1+\log x^{\frac{1}{n}}}{2},\quad b=\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\geqq\frac{g(0)+g\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\geqq\frac{1}{2n}\log x$$

参考　部分積分法で定積分を変形してから評価することもできるが，やや面倒である.

$$\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=\left[x\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\right]_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{2n}x^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{2}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx$$

$$=2\log\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}-\frac{1}{n}\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx$$

$$\therefore\quad n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=2n\log\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}-\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx\quad\cdots\cdots④$$

このとき,

$$2n\log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right)=\log\left(\frac{2+2^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right)^{2n}=\log\left\{\left(1+\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^{\frac{1}{n}}-1}}\right\}^{n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}$$

$$=n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\log\left(1+\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right)^{\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty} n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=2^0\log 2=\log 2$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} 2n\log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right)=\log 2\cdot\log e=\log 2 \quad \cdots\cdots⑤$$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき $1\leqq x^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$ であるから， $\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\leqq\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{2}$

また， $\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}-1}{1+x^{\frac{1}{n}}}=1-\dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{n}}}\geqq 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

よって $\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\leqq\dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{2}$

各辺を $1\leqq x\leqq 2$ で定積分すると，

$$\int_1^2\frac{1}{2}\,dx\leqq\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx\leqq\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{2}\,dx$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\leqq\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx\leqq\frac{2^{1+\frac{1}{n}}-1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{1+\frac{1}{n}}-1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx=\frac{1}{2}$ ……⑥

④，⑤，⑥より

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 n\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=\mathbf{\log 2-\frac{1}{2}}$$

第３問

平行四辺形 ABCD において，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b$，$a \leqq b$ とする．次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする．

条件：点 A，B，C，D はそれぞれ辺 EF，FG，GH，HE 上にある．

ただし，辺はその両端の点も含むものとする．

(1) $\angle\mathrm{BCG}=\theta$ とするとき，S を a，b，θ を用いて表せ．

(2) S のとりうる値の最大値を a，b を用いて表せ．

解説

$\theta>\dfrac{\pi}{6}$ のとき，直線 GC は平行四辺形 ABCD を分割し，B と D は直線 GC に関して異なる領域に存在する．

点 D が辺 AE 上，点 A が辺 EG 上に存在するとき，辺 EH と辺 GH は交わるため，不適である（図１）．

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき，直線 BC を C を中心に θ だけ回転させた直線に B，D から下ろした垂線の足が G，H と一意に定まり，同じことを GC と平行かつ A を通る直線に対しても行えば，E，F も一意に定まる（図２）．

図１

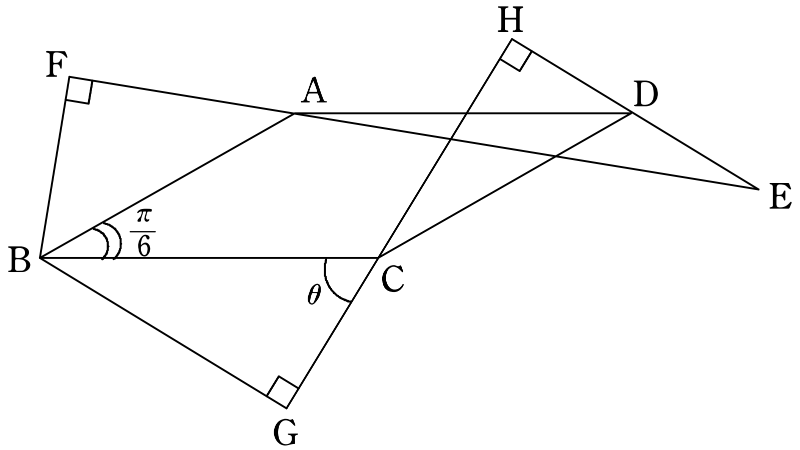
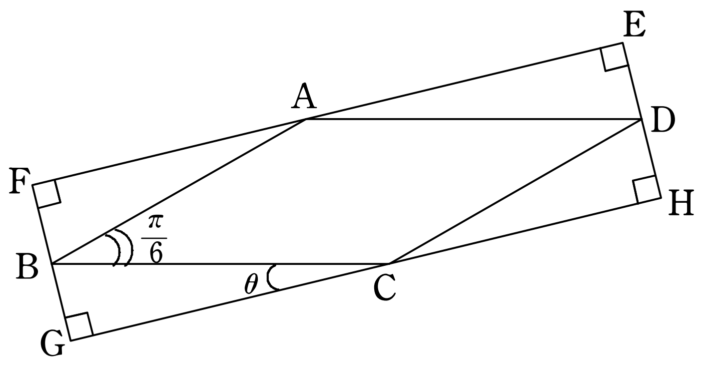


図２



よって，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき条件を満たし，長方形 EFGH が一意に存在するから，以下この条件で考える．

このとき，$\angle\mathrm{ABF}=\theta+\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{EAD}=\theta$，$\angle\mathrm{CDH}=\theta+\dfrac{\pi}{3}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{BCG}=\triangle\mathrm{DAE}=\frac{1}{2}b^2\sin\theta\cos\theta=\frac{b^2}{4}\cos2\theta,$$

$$\triangle\mathrm{ABF}=\triangle\mathrm{CDH}=\frac{1}{2}a^2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a^2}{4}\sin\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

また，平行四辺形ABCDの面積は　$ab\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{ab}{2}$

よって，長方形ABCDの面積は

$$\begin{aligned}S&=2\times\frac{1}{4}b^2\sin2\theta+2\times\frac{a^2}{4}\sin\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{ab}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{b^2}{2}\sin2\theta+\frac{a^2}{2}\sin\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{ab}{2}}\end{aligned}$$

(2)　(1)より

$$\begin{aligned}S&=\frac{a^2}{2}\left\{\sin2\theta\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos2\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}+\frac{b^2}{2}\sin2\theta+\frac{ab}{2}\\&=\frac{1}{4}\{(2b^2-a^2)\sin2\theta+\sqrt{3}a^2\cos2\theta\}+\frac{ab}{2}\end{aligned}$$

ここで，

$$k=\sqrt{(2b^2-a^2)^2+(\sqrt{3}a^2)^2}=\sqrt{4b^4-4a^2b^2+4a^4}=2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$$

とおくと，

$$S=\frac{k}{4}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{ab}{2}$$

ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{k}$，$\cos\alpha=\dfrac{2b^2-a^2}{k}$ である．

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ より $\alpha\leqq2\theta+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}+\alpha$ であるから，$\dfrac{\pi}{3}+\alpha$ と $\dfrac{\pi}{2}$ に注目する．

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2b^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{b^2}{a^2}-1}$$

(ｉ) $\dfrac{\pi}{3}+\alpha>\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\alpha\geqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$\tan\alpha\geqq\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，　$\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2b^2-a^2}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore$　$2a^2\geqq b^2$

$0<a\leqq b$ であるから　$a\leqq b\leqq\sqrt{2}a$

このとき $\sin(2\theta+\alpha)=1$ となる θ が存在するから，S の最大値は

$$\frac{k}{4}\cdot1+\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}+ab)$$

(ⅱ) $\dfrac{\pi}{3}+\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\alpha<\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$\tan\alpha<\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから　$b>\sqrt{2}a$

このとき $2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{3}+\alpha$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき S は最大となり，その最大値は

$$\frac{1}{4}\left\{(2b^2-a^2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}a^2\cdot\frac{1}{2}\right\}+\frac{ab}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{3}b^2+2ab)$$

(ｉ)，(ⅱ)より，S の最大値は　$\boldsymbol{\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}+ab)\ (a\leqq b\leqq\sqrt{2}a)\\ \dfrac{1}{4}(\sqrt{3}b^2+2ab)\ (b>\sqrt{2}a)\end{cases}}$

$\boxed{\text{別解}}$ 長方形の面積 S は，次のように求めてもよい．

$$\mathrm{FG}=\mathrm{FB}+\mathrm{BG}=\mathrm{AB}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{BC}\sin\theta=a\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+b\sin\theta,$$

$$\mathrm{FE}=\mathrm{FA}+\mathrm{AE}=\mathrm{AB}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{AD}\cos\theta=a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+b\cos\theta$$

よって，長方形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned}S&=\mathrm{FG}\times\mathrm{FE}=\left\{a\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+b\sin\theta\right\}\left\{a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+b\cos\theta\right\}\\&=a^2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+b^2\sin\theta\cos\theta+ab\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta\right\}\\&=\frac{a^2}{2}\sin\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{b^2}{2}\sin2\theta+ab\cos\frac{\pi}{3}\\&=\frac{a^2}{2}\sin\left(2\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{b^2}{2}\sin2\theta+\frac{ab}{2}\end{aligned}$$

第４問

この問いでは，0以上の整数の2乗になる数を平方数と呼ぶ．a を正の整数とし，$f_a(x)=x^2+x-a$ とおく．

(1)　n を正の整数とする．$f_a(n)$ が平方数ならば，$n \leqq a$ であることを示せ．

(2)　$f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく．次の条件（ｉ），（ii）が同値であることを示せ．

（ｉ）　$N_a=1$ である．

（ii）　$4a+1$ は素数である．

(解説)

(1)　$n>a$ と仮定すると，

$$f_a(n)-n^2=n-a>0,$$

$$(n+1)^2-f_a(n)=n+a+1>0$$

$$\therefore \quad n^2<f_a(n)<(n+1)^2$$

これは $f_a(n)$ が平方数であることに矛盾する．

したがって，$n \leqq a$ である．

(2)　$f_a(n)$ が平方数となるとき，0以上のある整数 m が存在し，

$$n^2+n-a=m^2$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-a=m^2$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m^2=a+\frac{1}{4}$$

$$\left(n+\frac{1}{2}-m\right)\left(n+\frac{1}{2}+m\right)=a+\frac{1}{4} \qquad \therefore \quad (2n-2m+1)(2n+2m+1)=4a+1 \quad \cdots\cdots①$$

（ｉ）$\Longrightarrow$（ii）について

$4a+1$ が合成数であると仮定すると，2以上の自然数 p，q $(p \leqq q)$ を用いて

$$4a+1=pq$$

と表せるから，① を満たすものとして，$2n-2m+1<2n+2m+1$ に注意すると，

$$(2n-2m+1,\ 2n+2m+1)=(1,\ pq),\ (p,\ q)$$

がある．

(ア) $(2n-2m+1,\ 2n+2m+1)=(1,\ pq)$ のとき

2式の和，差をとると

$$4n+2=1+pq=2+4a \qquad \therefore \quad n=a$$

$$4m=pq-1=4a \qquad \therefore \quad m=a$$

よって，$(n,\ m)=(a,\ a)$ のとき，$f_a(n)$ は平方数となる．

(イ) $(2n-3m+1,\ 2n+2m+1)=(p,\ q)$ のとき

2式の和，差をとると

$$4n+2=p+q \qquad \therefore \quad n=\frac{p+q-2}{4},$$

$$4m=q-p \qquad \therefore \quad m=\frac{q-p}{4}$$

以下，2つの整数 x，y について，$x-y$ が k の倍数であることを $x\equiv y \pmod{k}$ と表す.

$pq=4a+1$ より，$pq\equiv 1 \pmod{4}$ $\Longleftrightarrow$ $(p,\ q)\equiv(1,\ 1),\ (3,\ 3) \pmod{4}$

いずれの場合についても

$$p+q-2\equiv 0 \pmod{4},\quad q-p\equiv 0 \pmod{4}$$

が成り立ち，$2\leqq p\leqq q$ より $n>0$，$m>0$ であるから，n，m はいずれも自然数である.

また，

$$a-n=\frac{pq-1}{4}-\frac{p+q-2}{4}=\frac{(p-1)(q-1)}{4}>0$$

より $n\neq a$ であるから，$(n,\ m)=\left(\dfrac{p+q-2}{4},\ \dfrac{q-p}{4}\right)$ のとき，$f_a(n)$ は平方数となる.

(ア)，(イ) より，$N_a\geqq 2$ であるから，$N_a=1$ であることに矛盾する.

したがって，(i) $\Longrightarrow$ (ii) は真である.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) のとき

$4a+1$ が素数であるとき，① を満たすのは

$$(2n-2m+1,\ 2n+2m+1)=(1,\ 4a+1)$$

のみであり，2式の和，差をとると

$$4n+2=4a+2 \qquad \therefore\quad n=a$$

$$4m=4a \qquad \therefore\quad m=a$$

よって，$f_a(n)$ が平方数となるのは $(n,\ m)=(a,\ a)$ のときのみであるから，$N_a=1$ である.

したがって，(i) $\Longrightarrow$ (ii) は真である.

以上より，(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) である.

第５問

n を２以上の整数とする．１から n までの数字が書かれた札が各１枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている．
１以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して，次の操作 (T_i) を考える．

(T_i)　左から i 番目の札の数字が，左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ，これら２枚の札の位置を入れかえる．そうでなければ，札の位置をかえない．

最初の状態において札の数字は左から A_1，A_2，…，A_n であったとする．この状態から $(n-1)$ 回の操作 (T_1)，(T_2)，…，(T_{n-1}) を順に行った後，続けて $(n-1)$ 回の操作 (T_{n-1})，…，(T_2)，(T_1) を順に行ったところ，札の数字は左から 1，2，…，n と小さい順に並んだ．以下の問いに答えよ．

(1)　A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は２以下であることを示せ．

(2)　最初の状態としてありうる札の数字の並び方 A_1，A_2，…，A_n の総数を c_n とする．n が４以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ．

解説

(1)（ⅰ）$A_1<A_2$ のとき

A_1 の位置に注目する．

１回目の操作 (T_1) の後，A_1 は左端にある．２回目の操作 (T_1) の後に左から 1，2，……，n の順になるので，

$A_1=1$ または $A_1=2$ である．

（ⅱ）$A_1>A_2$ のとき

A_2 の位置に注目する．

１回目の操作 (T_1) の後，A_2 は左端に移動する．２回目の操作 (T_2) の後に左から 1，2，……，n の順になるので，

$A_2=1$ または $A_2=2$ である．

（ⅰ)，（ⅱ）より，A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は１か２である．

(2)　(1) の結果より，$A_1=1$，$A_2=1$，$A_1=2$，$A_2=2$ の４つの場合について考える．

（ⅰ）$A_1=1$ のとき

１回目の操作 (T_1) の後，$A_1=1$ は左端にある．その後 A_2，A_3，……，A_n の $n-1$ 個について考えればよい．

その並べ方は c_{n-1} 通りである．

（ⅱ）$A_2=1$ のとき

１回目の操作 (T_1) の後，$A_2=1$ は左端にある．その後 A_1，A_3，……，A_n の $n-1$ 個について考えればよい．

その並べ方は c_{n-1} 通りである．

（ⅲ）$A_1=2$ のとき

$A_2=1$ または $A_2\geqq 3$ の場合があり，いずれの場合も $A_1=2$ 以外の $n-1$ 個の並べ方は c_{n-1} 通りであるが，

$A_2=1$ の場合は（ⅱ）と重複する．これは A_3，A_4，……，A_n の $n-2$ 個を並べる場合の c_{n-2} 通りであるから，

これを除いて $c_{n-1}-c_{n-2}$ 通りである．

(iv) $A_2=2$ のとき

$A_1=1$ または $A_1\geqq 3$ であるから，(iii) と同様の考え方により， $c_{n-1}-c_{n-2}$ 通りである．

(i)〜(ii) より，

$$c_n=c_{n-1}+c_{n-1}+(c_{n-1}-c_{n-2})+(c_{n-1}-c_{n-2})=4c_{n-1}-2c_{n-2}$$

別解　(2) は次のように考えてもよい．

c_n 通りのうち， $A_1=1$ である並び方の総数を d_n とする．

$A_1=1$ である並べ方は，後ろの $n-1$ 枚が $n-1$ 枚の順列に対する操作で小さい順になればよいことから

$d_n=c_{n-1}$ が成り立つ．

さて，初めの T_1 後の左端の数は(1) より 1 または 2 であるから，その 2 通りで場合分けする．

(i)　左端が 1 のとき

　このような n 枚の順列は， A_1 と A_2 の交換を考慮すると

$$2d_n=2c_{n-1} \text{ 通り}$$

である．

(ii)　左端が 2 のとき

　このような n 枚の順列は，残り $n-1$ 枚の相対順位の列が「1 から始まらない条件を満たす列」になっていれば よいから，A_1 と A_2 の交換も考慮して

$$2\times(c_{n-1}-d_{n-1})=2(c_{n-1}-c_{n-2})$$

通りである．

(i)，(ii) より

$$c_n=2c_{n-1}+2(c_{n-1}-c_{n-2})=4c_{n-1}-2c_{n-2}$$

第６問

複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする．

(1) 曲線 C 上の複素数 z に対し，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ．

(2) α，β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

(3) γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ．

解説

(1) 曲線 C 上の複素数 z は $\begin{cases}\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\\ z\fallingdotseq 0\end{cases}$ を満たすから，

$$z-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

$$\Longleftrightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

とおける．これを変形すると，

$$\begin{aligned}z&=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+\frac{i}{2}\sin\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

ただし，$-\pi<\theta<\pi$ より $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ である．

よって，

$$\frac{1}{z}=z^{-1}=\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right\}=1-i\tan\frac{\theta}{2}$$

したがって，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 である．

(2) (1) の結果より，$-\pi<a<\pi$，$-\pi<b<\pi$，$a\fallingdotseq b$ とすると，

$$\frac{1}{\alpha}=1-i\tan\frac{a}{2},\quad \frac{1}{\beta}=1-i\tan\frac{b}{2}$$

と表せるから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}&=\left(1-i\tan\frac{a}{2}\right)^2+\left(1-i\tan\frac{b}{2}\right)^2\\&=2-\left(\tan^2\frac{a}{2}+\tan^2\frac{b}{2}\right)-2i\left(\tan\frac{a}{2}+\tan\frac{b}{2}\right)\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=x+yi$，$A=\tan\dfrac{a}{2}$，$B=\tan\dfrac{b}{2}$ とすると，

$$\begin{cases}x=2-(A^2+B^2)=2-(A+B)^2+2AB & \cdots\cdots①\\ y=-2(A+B) & \cdots\cdots②\end{cases}$$

② より　$A+B=-\dfrac{y}{2}$

①に代入すると　$x=2-\left(-\dfrac{y}{2}\right)^2+2AB$　　$\therefore$　$AB=\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{x}{2}-1$

ここで解と係数の関係により，A，B は

$$t^2+\frac{y}{2}t+\frac{y^2}{8}+\frac{x}{2}-1=0 \quad \cdots\cdots ③$$

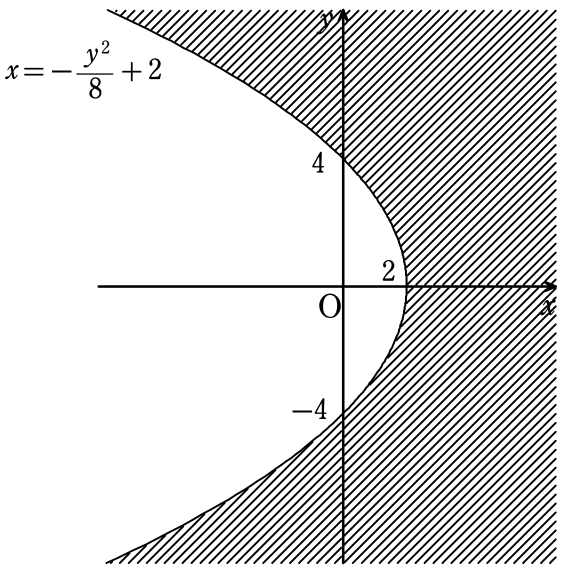
の 2 解であり，$-\pi<a<\pi$，$-\pi<b<\pi$，$a\fallingdotseq b$ より A，B は異なる実数であるから，③の判別式 D について

$$D=\left(\frac{y}{2}\right)^2-4\left(\frac{y^2}{8}+\frac{x}{2}-1\right)>0$$

$$-\frac{y^2}{4}-2x+4>0 \qquad \therefore \quad x<-\frac{y^2}{8}+2$$

よって，$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示すると，下の図の斜線部分となる.

ただし，境界線上は含まない.



(3)　$\gamma=r(\cos c+i\sin c)$ $(-\pi<c<\pi)$ とおくと,

$$\frac{1}{\gamma}=\gamma^{-1}=\frac{1}{r}\{\cos(-c)+i\sin(-c)\}=\frac{1}{r}(\cos c-i\sin c)$$

$$\therefore \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)=\frac{\cos c}{r}$$

(2) の領域の境界線 $x=-\dfrac{y^2}{8}+2$ より　$y^2=-8x+16=4\cdot(-2)(x-2)$

よって，境界線は $(0,\ 0)$ を焦点，$x=4$ を準線とする放物線であるから，γ が (2) で求めた範囲に属さない複素数であるとき,

$$r\geqq 4-r\cos c$$

$$(1+\cos c)r\geqq 4 \qquad \therefore \quad r\geqq\frac{4}{1+\cos c} \quad (\because\ -\pi<c<\pi \text{ より } 1+\cos c>0)$$

$r>0$ であるから　$0<\dfrac{1}{r}\leqq\dfrac{1+\cos c}{4}$

ここで，

$$\frac{\cos c(1+\cos c)}{4}=\frac{1}{4}\left(\cos c+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}$$

について，$-\pi<c<\pi$ より $-1<\cos c\leqq 1$ であるから，

$\cos c=-\dfrac{1}{2}$，つまり $c=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　最大値 $-\dfrac{1}{16}$，

$\cos c=1$，つまり $c=0$ のとき　最小値 $\dfrac{1}{2}$

をとるから，$\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)=\dfrac{\cos c}{r}$ のとりうる値の最大値は $\dfrac{1}{2}$，最小値は $-\dfrac{1}{16}$ である．

別解　(1) は極形式を用いずに示すこともできる．

$w=\dfrac{1}{z}$ とおくと，$z=\dfrac{1}{w}$ $(w\neq 0)$ であるから，$\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ より

$$\left|\frac{1}{w}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\iff\left|\frac{2-w}{2w}\right|=\frac{1}{2}\iff|w|=|w-2|$$

よって，点 w の軌跡は 2 点 0，2 を結ぶ線分の垂直二等分線であるから，$\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=1$ である．

別解　(3) の最大値，最小値は次のように求めることもできる．

$\gamma=x+yi$ とおくと，γ は (2) で求めた範囲に属さない複素数であるから，

$$x\geqq-\frac{1}{8}y^2+2\iff y^2\geqq-8x+16\quad\cdots\cdots④$$

を満たす．

また，$\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{x+yi}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$　　$\therefore$ $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

(i) $x\geqq 2$ のとき

$$0<\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}\leqq\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{2}$$

等号は $x=2$ のとき成り立つ．

(ii) $0<x\leqq 2$ のとき

$y^2\geqq 0$ であるから，④ を用いると，

$$0<\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}\leqq\frac{x}{x^2-8x+16}=\frac{1}{x+\dfrac{16}{x}-8}$$

$f(x)=x+\dfrac{16}{x}-8$ とすると $0<x\leqq 2$ のとき　$f'(x)=1-\dfrac{16}{x^2}<0$

よって，$f(x)$ は $0<x\leqq 2$ のとき単調減少であるから

$$0<\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\leqq\frac{1}{x+\dfrac{16}{x}-8}\leqq\frac{1}{2}$$

等号は $x=2$ で成り立つ．

(iii) $x=0$ のとき

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)=0$$

(iv) $x<0$ のとき

④ を用いると,

$$0>\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\geqq\frac{x}{x^2-8x+16}=\frac{-1}{|x|+\dfrac{16}{|x|}+8}\geqq-\frac{1}{2\sqrt{|x|\cdot\dfrac{16}{|x|}}+8}=-\frac{1}{16}$$

等号は

$$|x|=\frac{16}{|x|} \text{ かつ } x<0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-4$$

で成り立つ.

(ⅰ)〜(iv) より γ の実部について, 最大値 $\dfrac{1}{2}$, 最小値 $-\dfrac{1}{16}$ である.