解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2026年度　昭和大学Ⅰ期

【　講　評　】

例年通り，大問4題で出題された．昨年と比較すると，難易度が大幅に下がり，計算が煩雑なものもないため，かなり解きやすい試験であった．計算ミス等も考慮して，80% の得点を目指したい．以下，大問ごとに特徴を述べる．

1　小問集合（数列／指数関数／数学と人間の活動／データの分析，数列／対数関数）【やや易】

(1) は格子点の個数，(2) は指数方程式，(3) は階乗の素因数の個数，(4) は平均，分散，(5) は桁数・最高位の数と，いずれも教科書レベルの問題であった．ここは完答したい．

2　数Ⅲ積分法（定積分数列の極限）【標準】

ウォリス積分に関する出題であった．漸化式や積分結果を暗記していた人にとって，(4) までは容易に解答できるだろう．(5) ははさみうちの原理で極限を求める問題で，類題を解いた経験がない人にとっては解きづらい．差がつきそうである．

3　数Ⅲ微分法（共通接線）【やや易】

2曲線の共通接線を求める問題であった．定石通り，接点をおいて処理すればよい．後半の最小値も相加・相乗を用いるだけである．完答したい問題である．

4　確率（条件付き確率）【易】

3人の玉の取り出し方に関する問題で，事象が単純なものであり，解きやすかったであろう．確実に完答したい問題である．

【　解　答　】

1　(1)　20250，　(2)　$x=3$，　(3)　505，　(4)　$n=9$，　(5)　桁数34，最高位の数6

2　(1)　I_n，　(2)　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$，　(3)　$\dfrac{\pi}{2(2n+1)}$，　(4)　$\dfrac{\pi}{4}$，　(5)　$\dfrac{1}{\pi}$

3　(1)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\sqrt{a}},\ \sqrt{a}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}},\ -\sqrt{a}\right)$，　(2)　$a=1$ のとき $d=2\sqrt{2}$

4　(1)　$\dfrac{1}{5}$，　(2)　$\dfrac{4}{25}$，　(3)　$\dfrac{16}{125}$，　(4)　$\dfrac{64}{125}$，　(5)　$\dfrac{20}{61}$

【 解 説 】

1

(1)　$y=k$ (k は整数) とすると　$1 \leqq 2^k \leqq x \leqq 2026$

$2^{10}=1024<2026<2048=2^{11}$ であるから　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 10$

また，$2^k \leqq x \leqq 2026$ を満たす整数 x の個数は　$2026-2^k+1=2027-2^k$

よって，求める整数の組 $(x,\ y)$ の個数は

$$\sum_{k=0}^{10}(2027-2^k)=2027\cdot 11-\frac{2^{11}-1}{2-1}=\mathbf{20250}$$

(2)　$X=(\sqrt{2})^x=2^{\frac{x}{2}}$ とすると，

$$\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^3+\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2-8\cdot 2^{\frac{x}{2}}-8=0$$

$$X^3+X^2-8X-8=0$$

$$(X+1)(X^2-8)=0 \qquad \therefore \quad (X+1)(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})=0$$

$X=2^{\frac{x}{2}}>0$ であるから　$X=2\sqrt{2}$

よって　$2^{\frac{x}{2}}=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$　　$\therefore$　$x=3$

(3)　2026! を 10 進法で表したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，2026! を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する．

$[x]$ を x を超えない最大の整数とすると，2026! に含まれる素因数 5 の個数は

$$\left[\frac{2026}{5}\right]+\left[\frac{2026}{5^2}\right]+\left[\frac{2026}{5^3}\right]+\left[\frac{2026}{5^4}\right]=405+81+16+3=505$$

よって，2026! を 10 進法で表したとき，末尾に連続する 0 の個数は　**505**

(4)　$2n+1$ 個のデータを値が小さい順に見ると公差 1 の等差数列であるから，平均は 0 である．

また，分散について

$$\frac{1}{2n+1}\{(-n)^2+(-n+1)^2+(-n+2)^2+\cdots\cdots+1^2+0^2+1^2+\cdots\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2\}$$

$$=\frac{1}{2n+1}\{2(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)\}=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{n(n+1)}{3}$$

よって，分散の値が 30 であるとき，　$\dfrac{n(n+1)}{3}=30$　　$\therefore$　$n(n+1)=90=9\cdot 10$

n は整数であるから　$n=9$

2

(1)　$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと　$dx=-dt$，

x	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{2} \to 0$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-1)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt=\boldsymbol{I_n}$

(2)　$n\geqq 3$ のとき，部分積分法により

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\cos^{n-1}x\,dx=\Big[-\sin x\cos^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{n-2}x-\cos^n x)\,dx$$

$$=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

よって　$I_n+(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2}$　　　$\therefore$　$\boldsymbol{I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}}$

(3)　$I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^0 x\,dx=\frac{\pi}{2}$，　$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$，

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

よって，$I_2=\dfrac{1}{2}I_0$ が成り立つから，(2) で求めた式は $n\geqq 2$ で成り立つ．

これを用いると

$$I_{2n+1}I_{2n}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n+1}I_{2n-1}I_{2n-2}$$

$$\therefore\ (2n+1)I_{2n+1}I_{2n}=(2n-1)I_{2n-1}I_{2n-2}$$

$\{(2n+1)I_{2n+1}I_{2n}\}$ は定数列であるから

$$(2n+1)I_{2n+1}I_{2n}=1\cdot I_1\cdot I_0=1\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\ \boldsymbol{I_{2n+1}I_{2n}=\frac{\pi}{2(2n+1)}}$$

(4)　(3) より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nI_{2n+1}I_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{2(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(5)　$a_n=\dfrac{\{(2n)!\}^2 n}{(2^n\cdot n!)^4}$ とおく．

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $\cos x\geqq 0$ であるから　$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\geqq 0$

$I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$ の各辺に I_{2n} $(\geqq 0)$ をかけると　$I_{2n+1}I_{2n}<(I_{2n})^2<I_{2n}I_{2n-1}$

$I_{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}I_{2n-1}$ より $I_{2n-1}=\dfrac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$ であるから

$$I_{2n+1}I_{2n}<(I_{2n})^2<I_{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$$

$$\therefore\quad nI_{2n+1}I_{2n}<n(I_{2n})^2<\left(1+\frac{1}{2n}\right)nI_{2n}I_{2n+1}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，(2) を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}I_{2n}&=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}\\&=\cdots\cdots\\&=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0\\&=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$(2n)!!\times(2n-1)!!=(2n)!$，$(2n)!!=2^n\cdot n!$ であるから，

$$I_{2n}=\frac{(2n)!}{\{(2n)!!\}^2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

よって　$n(I_{2n})^2=\dfrac{\{(2n)!\}^2}{(2^n\cdot n!)^4}\cdot\dfrac{\pi^2}{4}=\dfrac{\pi^2}{4}a_n$

したがって ① より　$nI_{2n+1}I_{2n}<\dfrac{\pi^2}{4}a_n<\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)nI_{2n}I_{2n+1}$

$$\therefore\quad\frac{4}{\pi^2}\cdot nI_{2n+1}I_{2n}<a_n<\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)nI_{2n}I_{2n+1}$$

このとき (4) より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\pi^2}\cdot nI_{2n+1}I_{2n}=\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\pi},\quad\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)nI_{2n}I_{2n+1}=\frac{4}{\pi^2}\cdot1\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\pi}$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n)!\}^2n}{(2^n\cdot n!)^4}=\frac{1}{\pi}$$

$\boxed{3}$

(1)　$y=\dfrac{a^2}{27}x^3$ について　$y'=\dfrac{a^2}{9}x^2$

$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{a^2}{27}p^3\right)$における接線の方程式は

$$y=\frac{a^2}{9}p^2(x-p)+\frac{a^2}{27}p^3 \qquad \therefore \quad y=\frac{a^2p^2}{9}x-\frac{2a^2p^3}{27} \quad \cdots\cdots①$$

$y=-\dfrac{1}{x}$ について　$y'=\dfrac{1}{x^2}$

$\mathrm{Q}\left(q,\ -\dfrac{1}{q}\right)\ (q>0)$ における接線の方程式は

$$y=\frac{1}{q^2}(x-q)-\frac{1}{q} \qquad \therefore \quad y=\frac{1}{q^2}x-\frac{2}{q} \quad \cdots\cdots②$$

①，②が一致するとき

$$\begin{cases} \dfrac{a^2p^2}{9}=\dfrac{1}{q^2} \\ -\dfrac{2a^2p^3}{27}=-\dfrac{2}{q} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2p^2q^2=9 & \cdots\cdots③ \\ a^2p^3q=27 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

$a>0$，$q>0$ であるから，④が成り立つのは $p>0$ のときで，このとき③より　$apq=3$　$\cdots\cdots⑤$

これを④に代入すると　$ap^2\cdot 3=27$　　$\therefore$　$p^2=\dfrac{9}{a}$

$p>0$ であるから　$p=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

このとき⑤より　$a\cdot\dfrac{3}{\sqrt{a}}q=3$　　$\therefore$　$q=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\sqrt{a}},\ \sqrt{a}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}},\ -\sqrt{a}\right)$であり，②より直線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{1}{\frac{1}{a}}x-\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{a}}} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=ax-2\sqrt{a}}$$

(2)　(1)より　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+(\sqrt{a}+\sqrt{a})^2}=\sqrt{\dfrac{4}{a}+4a}=2\sqrt{a+\dfrac{1}{a}}$

$a>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式により

$$\mathrm{PQ}=2\sqrt{a+\frac{1}{a}}\geqq 2\sqrt{2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}}=2\sqrt{2}$$

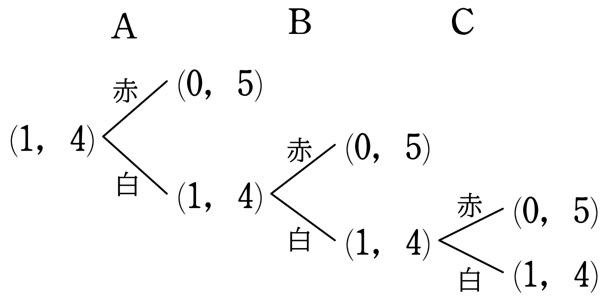
等号が成り立つのは　$a=\dfrac{1}{a}$ かつ $a>0$　$\iff$　$a=1$

よって，距離PQは $\boldsymbol{a=1}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{d=2\sqrt{2}}$ をとる．

4

袋の中に赤玉が a 個，白玉が b 個入っていることを $(a,\ b)$ と表す．

このとき，A，B，C の取り出し方を書き出すと，次のようになる．



(1)　A が取り出した玉が赤玉である確率は　$\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

(2)　B が取り出した玉が赤玉であるのは，A が白玉を取り出し，B が赤玉を取り出すときであるから，その確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{4}{25}}$$

(3)　C が取り出した玉が赤玉であるのは，A，B が白玉を取り出し，C が赤玉を取り出すときであるから，その確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{16}{125}}$$

(4)　全員が取り出した後，袋の中に赤玉が残っているのは，全員が白を取り出すときであるから，その確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\mathbf{\frac{64}{125}}$$

(5)　全員が取り出した後，袋の中に赤玉が残っていないことの余事象は，全員が白を取り出すことであるから，(4) よりその確率は

$$1-\frac{64}{125}=\frac{61}{125}$$

また，全員が取り出したあと，B が赤玉を取り出していたのは，A が白玉，B が赤玉，C が白玉を取り出すときであるから，その確率は

$$\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times1=\frac{4}{25}$$

よって，全員が取り出したあと，袋の中に赤玉が残っていなかったとき，B が赤玉を取り出していた条件つき確率は

$$\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}}=\mathbf{\frac{20}{61}}$$