解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2026年度　日本医科大学

【　講　評　】

例年通り，大問4題で出題された．出題形式にも変化はなかった．全体的に方針の立てやすい問題が多く，計算量もあまり多くなかったため，比較的得点しやすかったであろう．最低でも6割は得点したいところである．以下，大問ごとに特徴を述べる．

［Ⅰ］ 場合の数・確率（反復試行の確率）【やや易】

さいころの目によって箱に入る球の個数に関する確率の問題であった．典型的な反復試行の確率の問題であり，事象も複雑でないため，この大問は完答したい．

［Ⅱ］ ベクトル（空間座標）【標準】】

問１の平面の方程式，問２の平面に関する対称移動は，法線ベクトルを求められる人であれば容易に解答できるだろう．問３も典型問題であり，ここまでは落とせない．問４は d_p の変化が平面 π 上の考察で片づけられることに気づけたかどうかがポイントである．類題を解いた経験が大きく影響しただろう（慧修会では後期のレギュラー授業で扱っている）．

［Ⅲ］ 数Ⅲ微分法（接線）／図形と方程式（円の方程式）／2次関数（2次方程式の解の配置）【やや難】

問１は接線の方程式を求めるだけであり，問２は問１で求めた接線との交点を求めるだけであるから落とせない．問３は問２で求めた媒介変数表示で与えられる曲線と円の共有点の個数を求める問題である．図形的な考察は難しいので，パラメータ t に関する4次方程式を導き，異なる実数解の個数を考察する．方針に悩み，うまく解けなかった人も多いのではないだろうか．

［Ⅳ］ 数Ⅲ微分法（接線，関数のグラフ，曲線の凹凸）／数学Ⅲ積分法（積分方程式，面積）【標準】

問１は曲線の長さに関する積分方程式から関数を求め，グラフを図示する問題である．問２は問１で図示したグラフに関する面積と，三角形の面積の大小比較である．いずれの設問も特別な考察は不要で，計算力があれば得点できる．ここでどれだけ得点を稼げたかが鍵になるだろう．

【　解　答　】

［Ⅰ］

問1　アイ：$\dfrac{3}{8}$,

問2　ウエ：$\dfrac{4}{9}$,

問3　オカ：$\dfrac{25}{72}$

問4　キク：$\dfrac{4}{9}$

［Ⅱ］

問1　$x-2y+2z-5=0$

問2　$\mathrm{E}(4,\ 0,\ 5)$

問3　中心$(3,\ 2,\ 3)$，半径3

問4　$12-6\sqrt{3}$

［Ⅲ］

問1　$y=-\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}$

問2　$x(t)=\dfrac{2t}{1+t^4}$，$y(t)=\dfrac{2t^3}{1+t^4}$

問3　$N(r)=\begin{cases} 3 & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}<r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \text{のとき}\right) \\ 1 & \left(0<r\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ \text{のとき}\right) \end{cases}$

［Ⅳ］

問1　$f(x)=a\log\dfrac{4(a^2-x^2)}{3a^2}$，グラフは解説参照

問2　$\begin{cases} 1>a>20-18\log 3\ \text{のとき，}S_1(a)>S_2(a) \\ a=20-18\log 3\ \text{のとき，}S_1(a)=S_2(a) \\ 0<a<20-18\log 3\ \text{のとき，}S_1(a)<S_2(a) \end{cases}$

【　解　説　】

[I]

問１

$N_1=1$ となるためには，さいころを３回続けて投げたとき，

　１の目が１回，残りの２回は２，３，４の目　，

　５の目が１回，残りの２回は２，３，４の目　，

　６の目が１回，残りの２回は２，３，４の目

が出れば良いので，

$$ {}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^2\cdot 3=\frac{3\cdot 3}{6\cdot 2^2}=\frac{3}{2^3}=\frac{\mathbf{3}_{(ア)}}{\mathbf{8}_{(イ)}} $$

問２

$N_2=1$ となるためには，さいころを３回続けて投げたとき，

　２の目が１回，残りの２回は１，３，４，６の目　，

　５の目が１回，残りの２回は１，３，４，６の目

が出れば良いので，

$$ {}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)^2\cdot 2=\frac{3\cdot 2^3}{6\cdot 3^2}=\frac{2^2}{3\cdot 3}=\frac{\mathbf{4}_{(ウ)}}{\mathbf{9}_{(エ)}} $$

問３

$N_4=1$ となるためには，さいころを３回続けて投げたとき，

　４の目が１回，残りの２回は１，２，３，５，６の目

が出れば良いので，

$$ {}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5^2}{2\cdot 6^2}=\frac{\mathbf{25}_{(オ)}}{\mathbf{72}_{(カ)}} $$

問４

$N_1=1$ かつ $N_2=1$ となるためには，さいころを３回続けて投げたとき，

　１の目が１回，２の目が１回，３，４の目が１回　，

　５の目が１回，残りの２回は３，４の目　，

　６の目が１回，２の目が１回，３，４の目が１回

が出れば良いので，

$$ 3!\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\cdot 2+{}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{6\cdot 2\cdot 2+3\cdot 2^2}{6^3}=\frac{2+1}{2\cdot 3^2}=\frac{1}{6} $$

これと問１から，求める条件付き確率は，

$$ \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}}=\frac{\mathbf{4}_{(キ)}}{\mathbf{9}_{(ク)}} $$

[Ⅱ]

問1

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -1,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 0,\ 1)$ であるから，$\vec{n}=(1,\ -2,\ 2)$ とすると，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ -2,\ 2)\cdot(2,\ -1,\ -2)=0,$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ -2,\ 2)\cdot(-2,\ 0,\ 1)=0$$

$\vec{n}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{n}$ は平面 π の法線ベクトルである.

よって，平面 π の方程式は

$$1\cdot(x-1)-2(y-2)+2(z-4)=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x-2y+2z-5=0}$$

問2

点 D から π に下した垂線の足を H とする。問1より，平面 π の法線ベクトルは $\vec{n}=(1,\ -2,\ 2)$ であるから，H は実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\vec{n}=(2,\ 4,\ 1)+t(1,\ -2,\ 2)=(2+t,\ 4-2t,\ 1+2t)$$

と表せる.

H は平面 π 上の点であるから，これを問1の結果に代入すると，

$$(2+t)-2(4-2t)+2(1+2t)-5=0 \iff -9+9t=0 \iff t=1$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(3,\ 2,\ 3)$　　$\therefore$　H$(3,\ 2,\ 3)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\vec{n}$ に注意すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+2\overrightarrow{\mathrm{DH}}=(2,\ 4,\ 1)+2(1,\ -2,\ 2)=(4,\ 0,\ 5)\qquad\therefore\quad \mathbf{E}\,(\mathbf{4},\ \mathbf{0},\ \mathbf{5})$$

問3

円 K の中心は点 H であるから，　$(\mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3})$

また，△BCD の重心が G であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}=\frac{1}{3}\{(3,\ 1,\ 2)+(-1,\ 2,\ 5)+(2,\ 4,\ 1)\}=\left(\frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3}\right)$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3}\right)-(4,\ 0,\ 5)$$

$$=\left(-\frac{8}{3},\ \frac{7}{3},\ -\frac{7}{3}\right)=\frac{1}{3}(-8,\ 7,\ -7)$$

であるから，球 S の半径は,

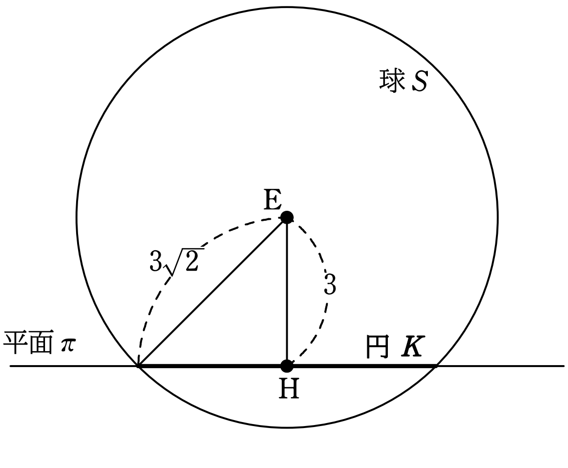
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{EG}}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{64+49+49}=\frac{1}{3}\sqrt{162}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$$

問2より,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{HE}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|=\left|\vec{n}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$$

従って，右図から円 K の半径は,

$$\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=\sqrt{9}=\boldsymbol{3}$$

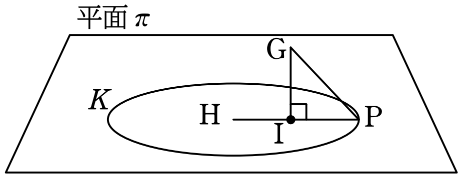


問４

Gから平面 π へ垂線GIを下ろすと　$(d_p)^2=|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{GI}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2$

Gは△DBCの重心であり，B，Cは平面 π 上にあることから，　DH：GI＝3：1

$\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ であるから，　$|\overrightarrow{\mathrm{GI}}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|=\dfrac{1}{3}\cdot 3=1$



よって，　$(d_p)^2=1+|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2$

したがって，以下 $|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|$ が最小となるときについて考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\left(\frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3}\right)+\frac{1}{3}(1,\ -2,\ 2)=\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{10}{3}\right)$$

したがって，　$\overrightarrow{\mathrm{HI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)-(3,\ 2,\ 3)=\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{HI}}|=\frac{1}{3}\sqrt{16+1+1}=\sqrt{2}<3$$

したがって，Iは円 K の内部の点であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|$ が最小となるのは，円 K の中心HとI，Pがこの順で一直線上に並ぶときである．

このとき　$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|-|\overrightarrow{\mathrm{HI}}|=3-\sqrt{2}$

したがって，$(d_p)^2$ の最小値は　$(d_p)^2=1+(3-\sqrt{2})^2=\mathbf{12-6\sqrt{2}}$

$\boxed{\text{参考}}$　問１の $\vec{n}$ は外積によって求めるとよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1-0,\ 4-2,\ 0-2)=(-1,\ 2,\ -2)=-(1,\ -2,\ 2)$$

$\boxed{\text{別解}}$　問１は法線ベクトルを用いずに，ベクトル方程式から導いてもよい．

π 上の点をQ$(x,\ y,\ z)$ とすると，QがABC上の点であることから，実数 α，β を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1-\alpha-\beta)\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x=1+2\alpha-2\beta & \cdots\cdots ①\\ y=2-\alpha & \cdots\cdots ②\\ z=4-2\alpha+\beta & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

と表せる．②より，$\alpha=2-y$ であり，これを①，③に代入すると，

$$\begin{cases}x=1+2(2-y)-2\beta\\ z=4-2(2-y)+\beta\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y-5=-2\beta\\ -2y+z=\beta\end{cases}$$

これらから β を消去して，

$$x+2y-5=-2(-2y+z)\qquad\therefore\quad \boldsymbol{x-2y+2z-5=0}$$

$\boxed{\text{別解}}$　問４は円 K 上の点Pをパラメータ表示して $(d_p)^2$ の最小値を求めることもできる．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -1,\ -2)$ は平面 π に平行なベクトルであり，　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3$

これに垂直で，平面 π に平行，かつ大きさが3のベクトルを $\vec{a}=(a,\ b,\ c)\ (a>0)$ とすると，

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \vec{a}\cdot\vec{n}=0\\ |\vec{a}|^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,\ b,\ c)\cdot(2,\ -1,\ -2)=0\\ (a,\ b,\ c)\cdot(1,\ -2,\ 2)=0\\ a^2+b^2+c^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-b-2c=0 & \cdots\cdots④\\ a-2b+2c=0 & \cdots\cdots⑤\\ a^2+b^2+c^2=9 & \cdots\cdots⑥\end{cases}$$

④+⑤ より，　$3a-3b=0$　　$\therefore$　$b=a$

④×2−⑤ より，　$3a-6c=0$　　$\therefore$　$c=\dfrac{a}{2}$

これらを ⑥ に代入すると，　$a^2+a^2+\dfrac{a^2}{4}=9 \Leftrightarrow \dfrac{9}{4}a^2=9 \Leftrightarrow a^2=4$

$a>0$ より，$a=2$ であるから，　$\vec{a}=(2,\ 2,\ 1)$

よって，円 K 上の点 P は，$0\leqq\theta<2\pi$ の実数 θ を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cos\theta+\vec{b}\sin\theta=(3,\ 2,\ 3)+(2,\ -1,\ -2)\cos\theta+(2,\ 2,\ 1)\sin\theta\\ &=(3,\ 2,\ 3)+(2,\ -1,\ -2)\cos\theta+(2,\ 2,\ 1)\sin\theta\\ &=(2\sin\theta+2\cos\theta+3,\ 2\sin\theta-\cos\theta+2,\ \sin\theta-2\cos\theta+3)\end{aligned}$$

と表せる．

$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと，　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　　$\therefore$　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \qquad \therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

よって，

$$\begin{aligned}(d_{\mathrm{P}})^2&=|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\left|\left(2t+\frac{5}{3},\ 2\sin\theta-\cos\theta-\frac{1}{3},\ \sin\theta-2\cos\theta+\frac{1}{3}\right)\right|\\ &=4t^2+\frac{20}{3}t+\frac{25}{9}+(2\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sin\theta-2\cos\theta)^2-\frac{2}{3}(2\sin\theta-\cos\theta)+\frac{2}{3}(\sin\theta-2\cos\theta)+\frac{2}{9}\\ &=4t^2+\frac{20}{3}t+3+5-8\sin\theta\cos\theta-\frac{2\sin\theta+2\cos\theta}{3}=4t^2+\frac{20}{3}t+8-8\cdot\frac{t^2-1}{2}-\frac{2}{3}t\\ &=6t+12\end{aligned}$$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ であるから，これが最小となるのは $t=-\sqrt{2}$ のときで，その最小値は

$$(d_p)^2=\mathbf{12-6\sqrt{2}}$$

である．

[Ⅲ]

問1

$y=\dfrac{1}{x}$ について，　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$　であるから、$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ における C_1 の接線 L の方程式は，

$$y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}}$$

問2

問1より，垂線 OH の方程式は，　$y=t^2x$　……①

これと L の方程式を連立すると，　$t^2x=-\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}$

$$\therefore\quad x=x(t)=\frac{\dfrac{2}{t}}{t^2+\dfrac{1}{t^2}}=\boldsymbol{\frac{2t}{t^4+1}}$$

① に代入して，　$y=y(t)=\boldsymbol{\dfrac{2t^3}{t^4+1}}$

問3

問2より，　$\mathrm{H}\left(\dfrac{2t}{t^4+1},\ \dfrac{2t^3}{t^4+1}\right)$ $(t>0)$

点 $\mathrm{Q}\left(1-\dfrac{r}{\sqrt{2}},\ 1-\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)=(R,\ R)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{QH}^2&=\left(\frac{2t}{t^4+1}-R\right)^2+\left(\frac{2t^3}{t^4+1}-R\right)^2=\frac{4t^2}{(t^4+1)^2}-\frac{4t}{t^4+1}R+R^2+\frac{4t^6}{(t^4+1)^2}-\frac{4t^3}{t^4+1}R+R^2\\&=\frac{4t^2(1+t^4)}{(t^4+1)^2}-\frac{4t(1+t^2)}{t^4+1}R+2R^2=\frac{4t^2}{t^4+1}-\frac{4t(1+t^2)}{t^4+1}\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+2-2\sqrt{2}\,r+r^2\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{QH}=r$ となるとき，

$$\frac{4t^2}{t^4+1}-\frac{4t(1+t^2)}{t^4+1}\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+2-2\sqrt{2}\,r+r^2=r^2$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{4t^2}{t^4+1}-\frac{4t(1+t^2)}{t^4+1}\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+2-2\sqrt{2}\,r=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{2t^2}{t^4+1}-\frac{2t(1+t^2)}{t^4+1}\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+1-\sqrt{2}\,r=0$$

両辺に t^4+1 をかけると，

$$2t^2-t(1+t^2)(2-\sqrt{2}\,r)+(1-\sqrt{2}\,r)(t^4+1)=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad (1-\sqrt{2}\,r)t^4-(2-\sqrt{2}\,r)t^3+2t^2-(2-\sqrt{2}\,r)t+1-\sqrt{2}\,r=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad (t-1)\{(1-\sqrt{2}\,r)t^3-t^2+t-1+\sqrt{2}\,r\}=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad (t-1)^2\{(1-\sqrt{2}\,r)t^2-\sqrt{2}\,rt+1-\sqrt{2}\,r\}=0$$

$$\therefore\quad (t-1)^2\left(t^2-\frac{\sqrt{2}\,r}{1-\sqrt{2}\,r}+1\right)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

t の方程式 ② の，$t>0$ における異なる実数解の個数が $N(r)$ である．

$f(t)=t^2-\dfrac{\sqrt{2}\,r}{1-\sqrt{2}\,r}t+1$　とおく．

$y=f(t)$ の軸は，　$\dfrac{\sqrt{2}\,r}{2(1-\sqrt{2}\,r)}>0$　$\left(\because\ 0<r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

また，　$f(0)=1>0$

さらに，$f(t)=0$ が $t=1$ を解に持つとき，

$$f(1)=0 \iff 1-\frac{\sqrt{2}\,r}{1-\sqrt{2}\,r}+1=0 \iff \frac{\sqrt{2}\,r}{1-\sqrt{2}\,r}=2 \iff \sqrt{2}\,r=2-2\sqrt{2}\,r$$

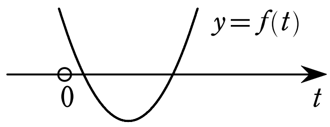
$$\iff r=\sqrt{2}-2r \qquad \therefore\ r=\frac{\sqrt{2}}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

方程式 $f(t)=0$ の判別式を D とする．

(Ⅰ)　$D>0 \iff \left(\dfrac{\sqrt{2}\,r}{1-\sqrt{2}\,r}\right)^2-4>0 \iff \dfrac{\sqrt{2}\,r}{1-\sqrt{2}\,r}>2$　$\left(\because\ 0<r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\iff \sqrt{2}\,r>2-2\sqrt{2}\,r \iff r>\sqrt{2}-2r \iff 3r>\sqrt{2} \qquad \therefore\ r>\frac{\sqrt{2}}{3}\ \text{のとき}$$

右図の通り，$f(t)=0$ は異なる 2 つの実数解を持ち，
③ より，これらは $t\neq 1$ である．よって，② の異なる
実数解の個数は　3



(Ⅱ)　$D=0$　　$\therefore$　$r=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき

③より，$f(t)=0$ は $t=1$ を重解に持つ．したがって，② の異なる解の個数は　1

(Ⅲ)　$D<0$　　$\therefore$　$r<\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき

$f(t)=0$ は実数解を持たないので，②の異なる解の個数は　1

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) より，$0<r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ に注意すると，

$$N(r)=\begin{cases} 3 & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}<r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \text{のとき}\right) \\ 1 & \left(0<r\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ \text{のとき}\right) \end{cases}$$

［Ⅳ］

問 1

条件（ｉ）より，

$$\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = a\log\left(\frac{a+t}{a-t}\right)-t$$

$$\Leftrightarrow\quad \int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = a\log(a+t)-a\log(a-t)-t$$

この両辺を t で微分すると，

$$\sqrt{1+\{f'(t)\}^2} = a\frac{1}{a+t}-a\frac{-1}{a-t}-1$$
$$=\frac{a(a-t)+a(a+t)}{a^2-t^2}-1$$
$$=\frac{2a^2}{a^2-t^2}$$

両辺を 2 乗して，　$1+\{f'(t)\}^2=\dfrac{4a^4}{(a^2-t^2)^2}-\dfrac{4a^2}{a^2-t^2}+1$

よって，　$\{f'(x)\}^2=4a^2\cdot\dfrac{a^2-(a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^2}=\dfrac{4a^2x^2}{(a^2-x^2)^2}$

条件（ⅱ）より，$f'(x)\leqq 0$ であり，$x>0$，$a>0$，$a^2-x^2>0$ であるから，

$$f'(x)=-\frac{2ax}{a^2-x^2}\quad\cdots\cdots①$$

この両辺を x で積分すると，積分定数 C を用いて，

$$f(x)=a\int\frac{-2x}{a^2-x^2}\,dx=a\log(a^2-x^2)+C$$

条件（ⅲ）を用いると，

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=a\log\frac{3a^2}{4}+C=0\qquad\therefore\quad C=-a\log\frac{3a^2}{4}$$

以上から，

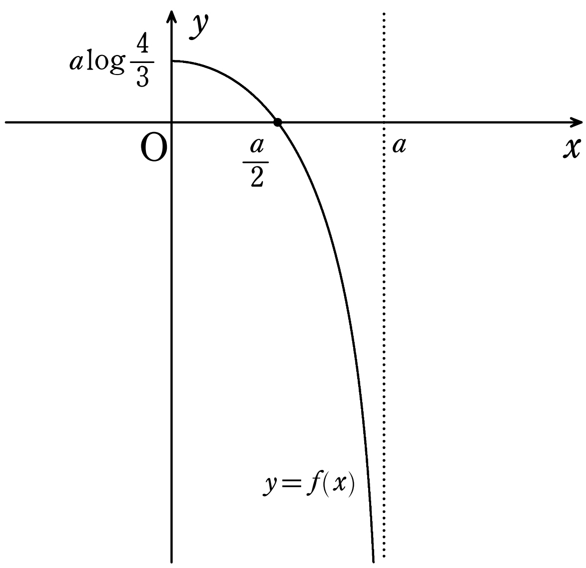
$$f(x)=a\log(a^2-x^2)-a\log\frac{3a^2}{4}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{f(x)=a\log\frac{4(a^2-x^2)}{3a^2}}$$

① より，

$$f''(x)=-2a\cdot\frac{a^2-x^2-x(-2x)}{(a^2-x^2)^2}=\frac{-2a(a^2+x^2)}{(a^2-x^2)^2}<0$$

よって，$y=f(x)$ の増減凹凸表は以下のようになり，
グラフは右図のようになる．

x	0	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	／
$f''(x)$		$-$	／
$f(x)$	$a\log\dfrac{4}{3}$	↘	$-\infty$



問２

問１のグラフから，

$$S_1(a)=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}} a\log\frac{4(a^2-x^2)}{3a^2}\,dx$$

$$=a\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{\log(a-x)+\log(a+x)+\log\frac{4}{3a^2}\right\}dx$$

$$=a\left[-(a-x)\log(a-x)+(a+x)\log(a+x)-2x+x\log\frac{4}{3a^2}\right]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$=a\left(-\frac{a}{2}\log\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}\log\frac{3a}{2}-a+\frac{a}{2}\log\frac{4}{3a^2}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(-\log\frac{a}{2}+3\log\frac{3a}{2}+\log\frac{4}{3a^2}\right)-a^2$$

$$=\frac{a^2}{2}\log\left\{\frac{2}{a}\cdot\left(\frac{3a}{2}\right)^3\cdot\frac{4}{3a^2}\right\}-a^2$$

$$=\frac{a^2}{2}\log 9-a^2=a^2(\log 3-1)$$

また，①より

$$f'\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{-2a\cdot\frac{a}{2}}{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$$

であるから，L の方程式は，

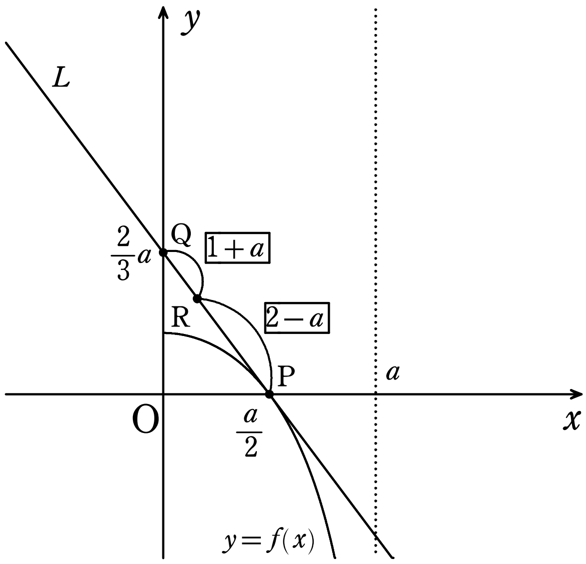
$$y=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)=-\frac{4}{3}x+\frac{2a}{3}$$

よって，$Q\left(0,\ \frac{2a}{3}\right)$ であるから，$\triangle$OPQ と $\triangle$OPR の

OP を底辺としたときの高さの比を考えることで，

$$S_2(a)=\frac{2-a}{(1+a)+(2-a)}\cdot(\triangle\mathrm{OPR})=\frac{2-a}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}a$$

$$=\frac{2a^2-a^3}{18}=\frac{a^2}{18}(2-a)$$



以上から，

$$S_1(a)-S_2(a)=a^2(\log 3-1)-\frac{a^2}{18}(2-a)=\frac{a^2}{18}(18\log 3-18-2+a)=\frac{a^2}{18}\{a-(20-18\log 3)\}$$

$1.09<\log 3<1.10$ より，　$-19.80<-18\log 3<-19.62 \iff 0.20<20-18\log 3<0.38$

また，$\frac{a^2}{18}>0$ であるから，$0<a<1$ において，

$$\begin{cases}1>a>20-18\log 3 \text{ のとき，} S_1(a)>S_2(a)\\ a=20-18\log 3 \text{ のとき，} S_1(a)=S_2(a)\\ 0<a<20-18\log 3 \text{ のとき，} S_1(a)<S_2(a)\end{cases}$$