解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2026年度　順天堂大学

【　講　評　】

例年通り，大問３題で出題された．大問１の小問集合は昨年の４題から3題と変更されたが，計算量や難易度を考慮するとほぼ変化なしと言える．また，大問３が記述式で証明を含む問題である点も変更がなかった．昨年同様，全体的に誘導が親切な問題が多く，解きやすい問題が多かった．正規合格のためには70% 以上の得点を目指したい．以下，大問ごとに特徴を述べる．

Ⅰ　小問集合

⑴　**指数関数（指数方程式）／対数関数（対数方程式）／三角関数（三角不等式）【やや易】**

典型的な方程式，不等式を解く問題であった．ここは完答したい．

⑵　**場合の数・確率（反復試行の確率）【標準】**

さいころを投げて，出た目の数と同じ枚数のコインを投げる問題であった．解き方によっては計算がやや面倒な設問もあるが，難しいわけではないので完答したい問題である．

⑶　**集合と命題（必要・十分条件）【標準】**

昨年に引き続き，必要十分条件を判定する問題であった．過去問で対策できていた人も多かっただろう．真偽の判定に悩むものは飛ばして，３題または４題は正解したい．

Ⅱ　**いろいろな曲線（２次曲線，複素数平面）【標準】**

楕円の平行移動，回転移動に関する問題であった．例年の第２問同様丁寧な誘導があるので，それにしたがっていくだけであるが，手順がわかっていないとやや計算が煩雑になる．出来が良くなかった人は，今後の試験に向けて見直しをしておいてもらいたい（本年の杏林大でも出題されていたテーマである）．

Ⅲ　**数列（数学的帰納法）／数Ⅲ微分法（導関数の定義，不等式への応用）【標準】**

⑴は導関数の定義，⑵は微分法を用いた不等式証明で，いずれも教科書レベルである．⑶は数学的帰納法と微分法を用いた不等式証明となるが，類題を解いた経験の有無で差がつくだろう（慧修会では後期のテキストで扱っている）．⑷は⑶の不等式を用いるだけである．⑴，⑵を完答し，⑶が解けなくても⑷を解いておきたい．

お問い合わせは☎0120-302-872
https://keishu-kai.com/

【 解　答 】

$\boxed{\text{I}}$ (1)(a)　アイ：$\frac{9}{2}$,　(b)　ウエ：$\frac{1}{4}$,　オ：2,　(c)　カ：0,　キク：$\frac{1}{6}$,　ケコ：$\frac{1}{4}$,　サシ：$\frac{3}{4}$

(2)(a)　アイウエオ：$\frac{21}{128}$,　カキク：$\frac{5}{16}$,　ケコサシスセソ：$\frac{105}{1024}$,

(3)(a)　ア：(A),　(b)　イ：(C),　(c)　ウ：(A),　(d)　エ：(C),　(e)　オ：(B)

$\boxed{\text{II}}$ (1)　ア：2,　イ：8,　ウ：4,

(2)　エ：(C),　オ：(A),　カ：(C),　キ：(B),　ク：(A),　ケ：(C),

(2)　コサ：15,　シ：2,　ス：1,　セ：5,　ソ：3,　タチ：$2\sqrt{2}$,　ツテト：$\frac{\sqrt{15}}{3}$,　ナ：2,　ニ：1,

ヌネノハ：$2\sqrt{3}\pm\sqrt{15}$

$\boxed{\text{III}}$ 解説参照

お問い合わせは☎0120-302-872
https://keishu-kai.com/

【 解 説 】

I

(1)(a) 方程式を変形すると

$$\frac{1}{4}\cdot 2^x - 4\cdot\frac{1}{2^x} = \frac{31\sqrt{2}}{8}$$

$$2(2^x)^2 - 32 = 31\sqrt{2}\cdot 2^x$$

$$2(2^x)^2 - 31\sqrt{2}\cdot 2^x - 32 = 0$$

$$(\sqrt{2}\cdot 2^x + 1)(\sqrt{2}\cdot 2^x - 32) = 0$$

$\sqrt{2}\cdot 2^x + 1 > 0$ であるから　$\sqrt{2}\cdot 2^x - 32 = 0$

$$2^x = \frac{32}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{9}{2}} \qquad \therefore\quad x = \boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

(b) 底の条件により　$x>0$，$x \fallingdotseq 1$

両辺正であるから，2 を底とする対数をとると

$$(3+\log_2 x)\log_2 x = \log_x 4\log_2 4$$

$$3\log_2 x + (\log_2 x)^2 = \frac{2}{\log_2 x}\cdot 2$$

$$(\log_2 x)^3 + 3(\log_2 x)^2 - 4 = 0$$

$$(\log_2 x - 1)\{(\log_2 x)^2 + 4\log_2 x + 4\} = 0$$

$$(\log_2 x - 1)(\log_2 x + 2)^2 = 0 \qquad \therefore\quad \log_2 x = 1,\ -2$$

よって，　$\boldsymbol{x = 2,\ \frac{1}{4}}$

これらは $x>0$，$x \fallingdotseq 1$ を満たす.

(c) 2 倍角の公式により

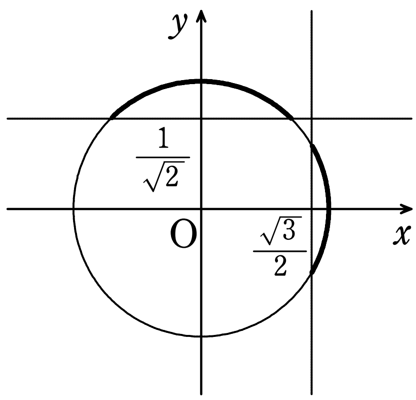
$$4\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{2}\cos x + \sqrt{6} \leqq 0$$

$$(2\sin x - \sqrt{2})(2\cos x - \sqrt{3}) \leqq 0$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \sin x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \sin x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ であるから，右の図より

$$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi}$$



(2)(a) 1 個のさいころを投げて k ($k=1$，2，3，4，5，6) の目が出て，k 枚のコインを投げて表が出ない確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

よって，求める確率は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{64}\right) = \boldsymbol{\frac{21}{128}}$

(b)　1個のさいころを投げて $k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ の目が出て，k 枚のコインを投げて1枚だけ表が出る確率は

$$\frac{1}{6}\times {}_k\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{k}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=\frac{1}{6}\left\{1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{32+32+24+16+10+6}{2^6}\\&=\frac{120}{6\cdot 2^6}=\mathbf{\frac{5}{16}}\end{aligned}$$

(c)　1回目にさいころを投げて出た目と同じ枚数のコインを投げ，2回目にさいころを投げて出た目と同じ枚数のコインを投げるとき，投げたコインのうち1枚だけ表が出るのは，1回目の試行で表が 出る場合と，2回目の試行で表が出る場合があるから，(a)，(b) より

$$2\times\frac{21}{128}\times\frac{5}{16}=\mathbf{\frac{105}{1024}}$$

別解　(a)，(b) の Σ 計算は，次のように行ってもよい．

$|x|<1$ のとき，

$$f(x)=\sum_{k=1}^{6}x^k=\frac{x(1-x^6)}{1-x}\quad\cdots\cdots①$$

とおくと，(a) の確率は

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{6}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

また，$f'(x)=\sum_{k=1}^{6}kx^{k-1}$ であるから (b) の確率は

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{12}f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

ここで①より

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

また，①より　$(1-x)f(x)=x(1-x^6)=x-x^7$

両辺を x で微分すると　$-f(x)+(1-x)f'(x)=1-7x^6$

$x=\frac{1}{2}$ を代入すると　$-f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)=1-7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$$-\frac{63}{64}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{57}{64}\qquad\therefore\quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}$$

したがって，

(a) の確率は　$\dfrac{1}{6}f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{63}{64}=\mathbf{\dfrac{21}{128}}$

(b) の確率は　$\dfrac{1}{12}f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{15}{4}=\mathbf{\dfrac{5}{16}}$

別解　(c) はすべての場合を書き出すと，次のようになる．

さいころを 2 回投げたときの目の和は，次の表のようになる．

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

さいころを 2 回投げたときの目の和が l $(l=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 12)$ であり，l 枚のコインを投げて 1 枚だけ表が出る確率は

$$ {}_l\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}={}_l\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{l} $$

したがって，求める確率は

$$ \frac{1}{6^2}\left\{1\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\times{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^5+5\times{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6+6\times{}_7\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^7\right. $$

$$ \left.+5\times{}_8\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^8+4\times{}_9\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^9+3\times{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+2\times{}_{11}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+1\times{}_{12}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right\} $$

$$ =\frac{1}{36}\cdot\frac{2048+3072+3072+2560+1920+1344+640+288+120+44+12}{2^{12}} $$

$$ =\frac{15120}{36\cdot 2^{12}}=\mathbf{\frac{105}{1024}} $$

(3)(a)　連続関数 $f(x)$ について，

P：すべての実数 a，b に対して $\int_a^b f(x)\,dx=\dfrac{b^3-a^3}{3}$ となる．

Q：$f(x)=x^2$ である．

とする．

P $\Longrightarrow$ Q は真である．

（証明）　$\int_a^b f(x)\,dx=\dfrac{b^3-a^3}{3}$ の両辺を b で微分すると　$f(b)=\dfrac{3b^2}{3}=b^2$　　$\therefore$　$f(x)=x^2$

Q $\Longrightarrow$ P は真である．

（証明）　$f(x)=x^2$ のとき　$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b x^2\,dx=\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_a^b=\dfrac{b^3-a^3}{a}$

よって，P は Q であるための必要十分条件である．（A）

(b)　異なる 2 つの正の整数 a，b について，

P：$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が無理数である．

Q：$\sqrt{ab}$ が無理数である．

とする．

P $\Longrightarrow$ Q は偽である．

（反例）　$a=b=2$ とすると，$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ は無理数であるが，$\sqrt{ab}=\sqrt{4}=2$ は有理数である．

Q $\Longrightarrow$ P は真である．

（証明）対偶命題 $\overline{\mathrm{P}} \Longrightarrow \overline{\mathrm{Q}}$ を示す．

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数であるとき，p を有理数とすると

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=p$$

と表せる．両辺を 2 乗すると

$$a+b+2\sqrt{ab}=p^2 \qquad \therefore \quad \sqrt{ab}=\frac{p^2-(a+b)}{2}$$

a，b は自然数，p は有理数であるから，$\sqrt{ab}$ は有理数である．

よって，P は Q であるための，十分条件であるが必要条件でない．（C）

(c)　2 次以上の多項式 $P(x)$ について

P：異なる実数 α，β に対して $P(\alpha)=P(\beta)=0$ となる．

Q：$P(x)$ が $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割り切れる．

P $\Longrightarrow$ Q は真，Q $\Longrightarrow$ P も真である．

（証明）2 次以上の多項式 $P(x)$ を $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする．

$P(x)$ が $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割り切れる　$\Leftrightarrow$　$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$　$\Leftrightarrow$　$P(\alpha)=P(\beta)=0$

よって，P は Q であるための必要十分条件である．（A）

(d)　複素数平面上の異なる3点 O(0)，A(α)，B(β) について，

P：$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つ．

Q：△OAB は二等辺三角形になる．

P ⟹ Q は真である．

（証明）両辺に $\alpha-\beta \fallingdotseq 0$ をかけると　$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=0$

$$\alpha^3-\beta^3=0 \qquad \therefore \quad \alpha^3=\beta^3$$

両辺の絶対値を考えると　$|\alpha^3|=|\beta^3| \iff |\alpha|^3=|\beta|^3 \iff |\alpha|=|\beta|$

よって，△OAB は二等辺三角形である．

Q ⟹ P は偽である．

（反例）$\alpha=1$，$\beta=i$ のとき，$|\alpha|=|\beta|=1$，すなわち △OAB は二等辺三角形になるが，

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1^2+1\cdot i+i^2=i \fallingdotseq 0$$

よって，P は Q であるための十分条件であるが，必要条件でない．（C）

(e)　平面上の2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ について，$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$，$\vec{b} \fallingdotseq \vec{0}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする．

点 C の位置ベクトルが $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は定数) で与えられるとき，

P：$s+t=1$ である．

Q：点 C が線分 AB の内分点

とする．

P ⟹ Q は偽

（反例）$s=2$，$t=-1$ のとき $s+t=1$ であるが，$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ は線分 AB を 2：1 に外分する点を表す．

Q ⟹ P は真

（証明）点 C が線分 AB の内分点であるとき，$0<k<1$ を満たすある実数 k が存在し，

$$\vec{c}=\vec{a}+k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+k(\vec{b}-\vec{a})=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立であるから　$\begin{cases} 1-k=s \\ k=t \\ 0<k<1 \end{cases} \iff \begin{cases} s+t=1 \\ s>0 \\ t>0 \end{cases}$

よって，P は Q であるための必要条件であるが，十分条件でない．（B）

Ⅱ

(1)　楕円 $x^2+2y^2=4$ を x 軸方向に1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した楕円の方程式は

$$(x-1)^2+2(y+2)^2=4$$

$$\therefore\quad x^2+2y^2-2x+8y+4=0$$

(2)　座標平面上の点 $(x,\ y)$ を原点中心に θ 回転して得られる点の座標を $(X,\ Y)$ とすると，

$$X+Yi=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+yi)\qquad\therefore\quad \alpha=\cos\theta\ \text{（C）},\ \beta=\sin\theta\ \text{（A）}$$

右辺を計算すると

$$X+Yi=(x\cos\theta-y\sin\theta)+(x\sin\theta+y\cos\theta)i$$

$$\therefore\quad x=x\cos\theta+y(-\sin\theta),\quad y=x\sin\theta+y\cos\theta$$

よって　$a=\cos\theta$（C），$b=-\sin\theta$（B），$c=\sin\theta$（A），$d=\cos\theta$（C）

(3)　曲線 C_1 は原点に関して対称な曲線 C_2：$3x^2+4\sqrt{3}\,xy-y^2=k^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したものであるとすると，

$$3(x-a)^2+4\sqrt{3}(x-a)(y-b)-(y-b)^2=k^2$$

$$\therefore\quad 3x^2+4\sqrt{3}\,xy-y^2-(6a+4\sqrt{3}\,b)x+(2b-4\sqrt{3}\,a)y+3a^2+4\sqrt{3}\,ab-b^2-k^2=0$$

C_1 の方程式と各項の係数を比較すると

$$\begin{cases}6a+4\sqrt{3}\,b=12+4\sqrt{3} & \cdots\cdots②\\ 2b-4\sqrt{3}\,a=2-8\sqrt{3} & \cdots\cdots③\\ 3a^2+4\sqrt{3}\,ab-b^2-k^2=-4+8\sqrt{3} & \cdots\cdots④\end{cases}$$

②，③ を解くと　$a=2,\ b=1$

これを③ に代入すると，　$k^2=15$

よって，曲線 C_1 は曲線 C_2：$3x^2+4\sqrt{3}\,xy-y^2=15$ を x 軸方向に2，y 軸方向に1だけ平行移動した曲線である．

また，曲線 C_3 は曲線 C_2 を原点の周りに $-\dfrac{\pi}{6}$ 回転した曲線であるから，C_2 上の点を $(x,\ y)$，C_3 上の点を $(X,\ Y)$ として (1) の ① で $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ とすると，

$$X+Yi=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}(x+yi)$$

$$x+yi=(X+Yi)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}(X+Yi)(\sqrt{3}+i)$$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}\,X-Y)+(X+\sqrt{3}\,Y)i\}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,X-Y),\quad y=\frac{1}{2}(X+\sqrt{3}\,Y)$$

C_2 の方程式に代入すると

$$\frac{3}{4}(\sqrt{3}\,X-Y)^2+4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{3}\,X-Y)(X+\sqrt{3}\,Y)-\frac{1}{4}(X+\sqrt{3}\,Y)^2=15$$

$$\frac{3}{4}(3X^2-2\sqrt{3}\,XY+Y^2)+\sqrt{3}(\sqrt{3}\,X^2+2XY-\sqrt{3}\,Y^2)-\frac{1}{4}(X^2+2\sqrt{3}\,XY+3Y^2)=15$$

$$\therefore\quad 5X^2-3Y^2=15$$

よって，曲線 C_3 の方程式は　$5x^2-3y^2=15$

$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{5}=1$ であるから，曲線 C_3 は焦点 $(\pm 2\sqrt{2},\ 0)$，漸近線 $y=\pm\sqrt{\dfrac{5}{3}}x=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}x$ をもつ双曲線である．

また，C_3，C_2 の中心は原点であり，C_1 は C_2 を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した曲線であるから，C_1 の中心は $(2,\ 1)$ である．

さらに，C_2 は C_3 を原点の周りに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転させた曲線であり，C_1 は C_2 を平行移動させた曲線であるから，

$\tan\theta=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ とすると，C_3 の漸近線の傾きは複号同順として

$$\begin{aligned}
\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)&=\frac{\tan\theta+\tan\dfrac{\pi}{6}}{1-\tan\theta\tan\dfrac{\pi}{6}}=\frac{\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}\\
&=\frac{\pm 3\sqrt{5}+3}{3\sqrt{3}\mp\sqrt{15}}=\frac{3(\pm\sqrt{5}+1)}{\sqrt{3}(3\mp\sqrt{5})}\\
&=\sqrt{3}\cdot\frac{(\pm\sqrt{5}+1)(3\pm\sqrt{5})}{9-5}=\sqrt{3}\cdot\frac{8\pm 4\sqrt{5}}{4}\\
&=2\sqrt{3}\pm\sqrt{15}
\end{aligned}$$

Ⅲ

(1)　$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\cdot\dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}$

$=\cos x$　(証明終)

(2)　$x\geqq 0$ において，$f(x)=x-\sin x\geqq 0$ の成立を示す．

$f'(x)=1-\cos x\geqq 0$

$x\geqq 0$ で $f(x)$ は単調に増加し，　$f(0)=0$

よって　$f(x)\geqq 0$（等号成立は $x=0$）　(証明終)

(3)　$F_n(x)\geqq 0$，$G_n(x)\geqq 0$ が成り立つことを，数学的帰納法で証明する．

(Ⅰ)　$n=1$ のとき，

$$F_1(x)=(-1)^0\{S_1(x)-\sin x\}=\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}-\sin x=(-1)^0\frac{x^1}{1!}-\sin x=x-\sin x\geqq 0\quad(\because\ (2))\ ,$$

$$G_1(x)=(-1)^0\{T_1(x)-\cos x\}=\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}-\cos x=(-1)^0\frac{x^0}{0!}-\cos x=1-\cos x\geqq 0$$

より成り立つ．

(Ⅱ)　$n=m$ のとき

$x\geqq 0$ において $F_m(x)\geqq 0$，$G_m(x)\geqq 0$ が成り立つと仮定すると，$n=m+1$ のとき，

$$F_{m+1}(x)=(-1)^m\{S_{m+1}(x)-\sin x\}=(-1)^m\left\{\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}-\sin x\right\},$$

$$G_{m+1}(x)=(-1)^m\{T_{m+1}(x)-\cos x\}=(-1)^m\left\{\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}-\cos x\right\}$$

であり，

$$F'_{m+1}(x)=(-1)^m\left\{\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}-\cos x\right\}=G_{m+1}(x)\quad\cdots\cdots①\ ,$$

$$G'_{m+1}(x)=(-1)^m\left\{(-1)^0\frac{x^0}{0!}+\sum_{k=2}^{m+1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}-\cos x\right\}'=(-1)^m\left\{0+\sum_{k=2}^{m+1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-3}}{(2k-3)!}+\sin x\right\}$$

$$=(-1)^m\left\{\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\sin x\right\}=(-1)^m\left\{-\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\sin x\right\}$$

$$=(-1)^{m-1}\left\{\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}-\sin x\right\}=F_m(x)\geqq 0$$

よって，$x\geqq 0$ で $G_{m+1}(x)$ は単調に増加し，

$$G_{m+1}(0)=(-1)^m\left\{(-1)^0\frac{1}{0!}-1\right\}=0\qquad\therefore\quad G_{m+1}(x)\geqq 0$$

したがって①から，$x\geqq 0$ で $F'_{m+1}(x)$ は単調に増加し，

$$F_{m+1}(0)=(-1)^m\{0-\sin 0\}=0\qquad\therefore\quad F_{m+1}(x)\geqq 0$$

よって，$n=m+1$ のときも成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，数学的帰納法により $x\geqq 0$ において $F_n(x)\geqq 0$，$G_n(x)\geqq 0$ が成り立つ．　(証明終)

(4) (3) より，

$$F_2(1) \geqq 0 \iff (-1)^1\{S_2(1)-\sin 1\} \geqq 0$$

$$\iff \sin 1 \geqq S_2(1) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k-1}\frac{1^{2k-1}}{(2k-1)!} = 1-\frac{1}{3!} = \frac{7}{6} = 0.83\cdots$$

$\therefore\ \sin 1 > 0.83$

が成立し，

$$F_3(1) \geqq 0 \iff (-1)^2\{S_3(1)-\sin 1\} \geqq 0$$

$$\iff \sin 1 \leqq S_3(1) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1}\frac{1^{2k-1}}{(2k-1)!} = 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!} = \frac{120-20+1}{120} = \frac{101}{120} = 0.84\cdots$$

$\therefore\ \sin 1 < 0.85$

が成立する．

よって，　$0.83 < \sin 1 < 0.85$　(証明終)

別解　(1) は加法定理を用いてもよい．

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\cos x-\frac{1-\cos h}{h}\sin x\right) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin h}{h}\cos x-\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}\sin x\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin h}{h}\cos x-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}\sin x\right\} = 1\cdot\cos x-1\cdot\frac{0}{1+1}\sin x\\ &= \cos x\end{aligned}$$

(証明終)