2026年度　東京慈恵会医科大学

【　講　評　】

例年通り，大問４題での出題であった．出題内容も，確率，数学Ⅲ微分法・積分法，整数の性質と頻出分野の通りであった．一方で，大問２から大問４までは小問が設けられていないため，やや取り組みづらい試験であった．解けるところを確実に解き，50％程度の得点を目指したい．以下，大問ごとに述べる．

１．確率【標準】

（ア），（イ）共に条件を満たす場合を素直に数え上げればよい．他の問題の難易度を考えると，確実に得点すべき問題である．

２．数学Ⅲ微分法・積分法【標準】

関数のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積の極限を求める問題であった．グラフと x 軸との共有点の x 座標の１つが求まらないことから，これを文字で置いて面積を求めることになる．面積の極限ははさみうちの原理を用いることになるが，共有点の x 座標が方程式 $f_n(x)=0$ を満たすことを利用することができたかどうかがポイントであった．

３．整数の性質【やや難】

各項が素数 p との最大公約数で決定される数列に関する問題であった．定石通り，いくつかの項を具体的に調べることで数列の規則を把握し，帰納法で証明すればよい．後は，この数列によって角が定まる $\cos\theta$ の最大値を考えることになる．整数，特に素数に関する問題に慣れていたかどうかがポイントで，東京慈恵会医科大入試の対策ができていたかどうかが大いに影響するところだろう．

４．積分法（体積）【やや難】

空間座標内の移動する線分で作られる曲面によって囲まれた立体の体積を求める問題であった．線分の端点Ｑや，線分上の点の座標を求めることはできると思うが，体積を求めるために，どの座標軸に垂直な断面を考えるべきかの判断が難しい．ここは完答できた人は少ないだろうから，部分点狙いで良いだろう．

【　解　答　】

１．（ア）$\dfrac{2}{9}$，　（イ）$\dfrac{271}{729}$

２．$\dfrac{1}{2}$（解説参照）

３．$n=1,\ p,\ 2p-1$（解説参照）

４．$\dfrac{16}{27}$（解説参照）

【　解　説　】

１.

Aが数字 a の玉を取り出し，Bが数字 b の玉を取り出すことを $(a,\ b)$ と表す．

このとき，２つの事象 P，Q を

$P:|a-b|=1$，すなわち $(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$,

$Q:|a-b|\fallingdotseq 1$，すなわち $(p,\ q)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$

とする．P のとき玉を取り除き，Q のときは取り除かない．

(ア)　２回目の操作を終えたとき，袋の中に玉がちょうど１個ずつ残っているのは，２回とも P が起こるとき，すなわち

$(1,\ 2)$ と $(2,\ 1)$，$(1,\ 2)$ と $(2,\ 3)$，$(2,\ 1)$ と $(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ と $(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ と $(3,\ 2)$,

$(2,\ 3)$ と $(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$ と $(3,\ 2)$，$(3,\ 2)$ と $(2,\ 1)$，$(3,\ 2)$ と $(2,\ 3)$

の８通りが起こるときである．１回目に玉を取り出すと，２回目は袋の中の玉が２個ずつとなっていることに注意すると，求める確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times 8=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(イ)　３回目の操作を終えたとき，袋の中に玉がちょうど２個ずつ残っているのは，P が１回，Q が２回起こるときである．P が起こると，袋の中の玉の個数が減るので，P が何回目に起こるかに注目する．

(ⅰ)　P が１回目に起こるとき

１回目が $(1,\ 2)$ のとき，２回目は $(3,\ 3)$ または $(3,\ 1)$，３回目は $(3,\ 3)$ または $(3,\ 1)$ が起こる．

１回目が $(2,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$ の場合も同様であるから，このときの確率は

$$\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times 2\right)\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times 2\right)\right\}\times 4=\frac{1}{9}$$

(ⅱ)　P が２回目に起こるとき

１回目は Q が起こる確率は　$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\times 5=\frac{5}{9}$

２回目に $(1,\ 2)$ が起こるとき，３回目は $(3,\ 1)$ または $(3,\ 3)$ が起こり，２回目に $(2,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$ が起こるときも同様であるから，このときの確率は

$$\frac{5}{9}\times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\times 4\right)\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times 2\right)=\frac{10}{81}$$

(ⅲ)　P が３回目に起こるとき

１回目と２回目に Q が起こり，３回目に P が起こるときであるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\times 5\right)\times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\times 5\right)\times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\times 4\right)=\frac{100}{729}$$

(ⅰ)～(ⅲ) より，求める確率は

$$\frac{1}{9}+\frac{10}{81}+\frac{100}{729}=\frac{81+90+100}{729}=\boldsymbol{\frac{271}{729}}$$

２．

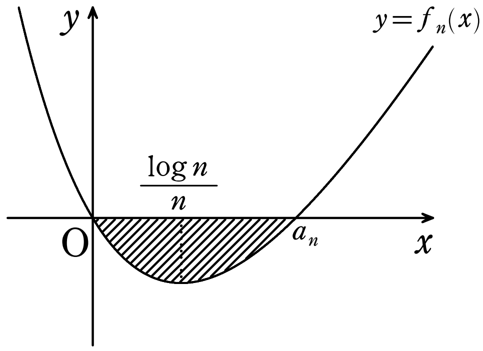
$$f'_n(x)=-ne^{-nx}+1=\frac{e^{nx}-n}{e^{nx}}$$

$f'_n(x)=0$ となるとき　$e^{nx}=n$

$$nx=\log n \qquad \therefore \quad x=\frac{\log n}{n}$$

$f_n(x)$ の増減は次のようになる．

x		$\frac{\log n}{n}$	
$f_n'(x)$	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	↘		↗



また，

$$f_n(0)=0,\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\infty$$

であるから，$y=f_n(x)$ のグラフは右図のようになる．

よって，$x>\frac{\log n}{n}$ の範囲に $f_n(x)=0$ を満たす x がただ 1 つ存在するから，それを $x=a_n$ とおく．

曲線 $y=f_n(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$S_n=\int_0^{a_n}\{-f_n(x)\}\,dx=\int_0^{a_n}(-e^{-nx}-x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{n}e^{-nx}-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^{a_n}$$
$$=\frac{1}{n}(e^{-na_n}-1)-\frac{1}{2}a_n{}^2+a_n$$

ここで，$f_n(a_n)=0$ が成り立つから

$$e^{-na_n}+a_n-1=0 \qquad \therefore \quad a_n=1-e^{-na_n}$$

また，$\frac{\log n}{n}<a_n$ より　$\log n<na_n$

$\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$ であるから，追い出しの原理により　$\lim_{n\to\infty} na_n=\infty$　……①

よって　$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-na_n})=1$　……②

①，② を用いると

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}(e^{-na_n}-1)-\frac{1}{2}a_n{}^2+a_n\right\}=0-\frac{1}{2}\cdot 1^2+1=\frac{1}{2}$$

3．

素数 p は3以上の定数とする．自然数の数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+\gcd(p,\ a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとき，$\cos\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right)$ を最大にする n をすべて求めよ．ただし，p と a_n の最大公約数を

$\gcd(p,\ a_n)$ で表す．

p は3以上の素数であるから，$1\leqq a_n\leqq p-1$ のとき　$\gcd(p,\ a_n)=1$

よって，$a_1=1$ より

$$a_2=a_1+\gcd(p,\ a_1)=1+\gcd(p,\ 1)=1+1=2,$$

$$a_3=a_2+\gcd(p,\ a_2)=2+\gcd(p,\ 2)=2+1=3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

であるから，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ p-1$ において　$a_n=n$ ……①　と推定できる．

①が成り立つことを，数学的帰納法で示す．

(ｉ) $n=1$ のとき

$a_1=1$ より，①は成り立つ．

(ii) $n=k\ (1\leqq k\leqq p-1)$ のとき

$a_k=k$ が成り立つと仮定すると，$\gcd(p,\ a_k)=1$ であるから

$$a_{k+1}=a_k+\gcd(p,\ a_k)=k+1$$

となり，$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

数学的帰納法により，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ p-1$ において $a_n=n$ が成り立つ．

これを用いると，

$$a_p=a_{p-1}+\gcd(p,\ a_{p-1})=p-1+1=p,$$

$$a_{p+1}=a_p+\gcd(p,\ a_p)=p+\gcd(p,\ p)=p+p=2p,$$

$$a_{p+2}=a_{p+1}+\gcd(p,\ a_{p+1})=2p+p=3p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

であるから，$n=p,\ p+1,\ p+2,\ \cdots\cdots$ において　$a_n=(n-p+1)p$　……②　と推定できる．

②が成り立つことを，数学的帰納法で示す．

(ｉ) $n=p$ のとき

$a_p=p$ より，②は成り立つ．

(ii) $n=l\ (p\leqq l)$ のとき

$a_l=(l-p+1)p$ が成り立つと仮定すると，$l-p+1\geqq 1$ で $l-p+1$ は整数であるから，

$$\gcd(p,\ a_l)=p$$

したがって，

$$a_{l+1}=a_l+\gcd(p,\ a_l)=(l-p+1)p+p=(l-p+2)p$$

となり，$n=l+1$ のときも②は成り立つ．

数学的帰納法により，$n=p,\ p+1,\ p+2,\ \cdots\cdots$ において $a_n=(n-p+1)p$ が成り立つ．

$\cos\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right)=1$，すなわち

$$\frac{a_{n+p}}{a_n}\pi=2k\pi \qquad \therefore \quad k=\frac{a_{n+p}}{2a_n}$$

となる自然数 k が存在するならば，そのときに限り $\cos\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right)$ は最大値をとる．このときの自然数 n を求めればよい．

(i)　$1\leqq n\leqq p-1$ のとき

$p+1\leqq n+p\leqq 2p-1$ であるから　$a_n=n$，$a_{n+p}=(n+p-p+1)p=(n+1)p$

よって，　$k=\dfrac{a_{n+p}}{2a_n}=\dfrac{(n+1)p}{2n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)p$

$1\leqq n\leqq p-1$ より $\dfrac{1}{p-1}\leqq\dfrac{1}{n}\leqq 1$ であるから，これが自然数となるのは　$\dfrac{1}{n}=1$　　$\therefore$　$n=1$

このとき　$k=\dfrac{1}{2}(1+1)p=p$

(ii)　$p\leqq n$ のとき

$2p\leqq n+p$ であるから　$a_n=(n-p+1)p$，$a_{n+p}=(n+p-p+1)p=(n+1)p$

よって，　$k=\dfrac{a_{n+p}}{2a_n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(n+1)p}{(n-p+1)p}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(n-p+1)+p}{n-p+1}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{p}{n-p+1}\right)$

p は3以上の素数であり，$n-p+1\geqq 1$ であるから，$\dfrac{p}{n-p+1}$ が自然数となるのは

$$n-p+1=1,\ p \qquad \therefore \quad n=p,\ 2p-1$$

$n=p$ のとき　$k=\dfrac{1}{2}(1+p)$

$n=2p-1$ のとき　$k=\dfrac{1}{2}(1+1)=1$

であり，p は奇数の素数であるから，いずれの場合も k は自然数である．

(i)，(ii) より，求める自然数 n は　$n=1$，p，$2p-1$

4.

$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(1-p,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{PE}}=(-p,\ 0,\ 1)$ であるから,

$$\vec{n}=(1,\ p-1,\ p)$$

とすると,

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PE}}=0$$

$\vec{n}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{PD}}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{PE}}\neq\vec{0}$ であるから, $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{PD}}$, $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{PE}}$

よって, $\vec{n}$ は平面 PDE の法線ベクトルであるから, この平面を表す方程式は

$$1\cdot(x-p)+(p-1)\cdot(y-0)+p\cdot(z-0)=0$$

$$\therefore\quad x+(p-1)y+pz-p=0 \quad \cdots\cdots①$$

直線 BC 上の点 Q は $z=-y+2$, $x=0$ を満たすから, これらを ① に代入すると

$$0+(p-1)y+p(-y+2)-p=0 \qquad \therefore\quad y=p$$

このとき $z=-p+2$ であるから　Q$(0,\ p,\ -p+2)$

立体 K の平面 $y=k\ (0\leqq k\leqq 2)$ による断面を考える.

線分 PQ と平面 $y=k$ の交点を R とすると, y 座標の内分比より PR : RQ $=k:p-k$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{(p-k)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{k+(p-k)}=\frac{p-k}{p}(p,\ 0,\ 0)+\frac{k}{p}(0,\ p,\ -p+2)$$

$$=\left(p-k,\ k,\ -k+\frac{2}{p}\right)$$

R$(x,\ y,\ z)$ とすると, $\begin{cases} x=p-k & \cdots\cdots② \\ y=k \\ z=-k+\dfrac{2}{p}k & \cdots\cdots③ \end{cases}$

② より　$p=x+k$

③ に代入すると　$z=-k+\dfrac{2k}{x+k}$

$z=0$ とすると　$k(x+k)=2k$　　$\therefore\quad x=2-k$

これと $x\geqq 0$, $z\geqq 0$, $x\leqq 2k$ に注意すると, 立体 K の $y=k$ による断面は, 次の場合が考えられる.

(i)　$2k\leqq 2-k$, すなわち $0\leqq k\leqq \dfrac{2}{3}$ のとき

断面積を $S_1(k)$ とすると, 右図の斜線部分であるから,

$$S_1(k)=\int_0^{2k}\left(-k+\frac{2k}{x+k}\right)dx$$

$$=\Big[-kx+2k\log|x+k|\Big]_0^{2k}$$

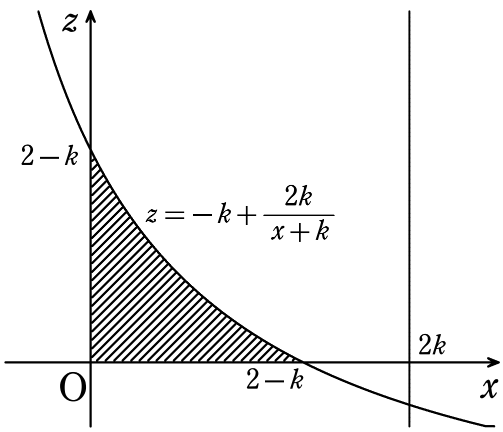
$$=-2k^2+2k(\log 3k-\log k)$$

$$=-2k^2+2k\log 3$$

よって, このときの体積を V_1 とすると

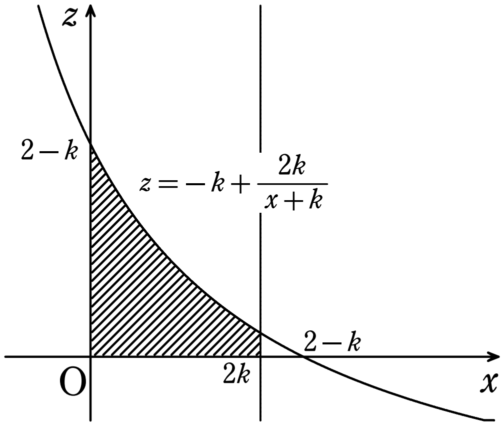
$$V_1=\int_0^{\frac{2}{3}}S_1(k)\,dk=\int_0^{\frac{2}{3}}(-2k^2+2k\log 3)\,dk$$

$$=\left[-\frac{2}{3}k^3+k^2\log 3\right]_0^{\frac{2}{3}}=-\frac{16}{81}+\frac{4}{9}\log 3$$



（ii）　$2-k \leqq 2k$，すなわち $\dfrac{2}{3} \leqq k \leqq 2$ のとき

断面積を $S_2(k)$ とすると，右図の斜線部分であるから，



$$
\begin{aligned}
S_2(k) &= \int_0^{2-k} \left(-k + \frac{2k}{x+k} \right) dx \\
&= \Big[-kx + 2k\log|x+k| \Big]_0^{2-k} \\
&= -k(2-k) + 2k(\log 2 - \log k) \\
&= k^2 + 2k(\log 2 - 1) - 2k\log k
\end{aligned}
$$

C を積分定数とすると，

$$
\int k\log k \, dk = \frac{1}{2}k^2\log k - \frac{1}{4}k^2 + C
$$

であるから，このときの体積を V_2 とすると，

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \int_{\frac{2}{3}}^{2} S_2(k)\, dk = \int_{\frac{2}{3}}^{2} \{ k^2 + 2k(\log 2 - 1) - 2k\log k \} \, dk \\
&= \left[\frac{1}{3}k^3 + k^2(\log 2 - 1) - k^2\log k + \frac{1}{2}k^2 \right]_{\frac{2}{3}}^{2} \\
&= \frac{8}{3} - \frac{8}{81} + \frac{32}{9}\left(\log 2 - \frac{1}{2} \right) - 4\log 2 + \frac{4}{9}\log\frac{2}{3} \\
&= \frac{216-8-144}{81} + \frac{32}{9}\log 2 - 4\log 2 + \frac{4}{9}(\log 2 - \log 3) \\
&= \frac{64}{81} - \frac{4}{9}\log 3
\end{aligned}
$$

（ i ），（ii）より，求める体積は

$$
\begin{aligned}
V_1 + V_2 &= -\frac{16}{81} + \frac{4}{9}\log 3 + \frac{64}{81} - \frac{4}{9}\log 3 \\
&= \frac{48}{81} = \mathbf{\frac{16}{27}}
\end{aligned}
$$