解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2026年度　東京医科大

【　講　評　】

例年通り，大問４題がマーク形式で出題された．第１問の小問集合は昨年同様に解きやすい問題が多く，その他の大問も難しいものはなかった．一方，2020年以降毎年出題されていた場合の数・確率が出題されなかった点と，第４問の(4)で記述問題が出題された点は目新しかった（2020年以降，記述問題の出題はなかった）．１次通過のためには全体で75% 以上は得点したい．以下，大問ごとに特徴を述べる．

第１問　小問集合【やや易】

(1)は三角関数（余角公式），(2)は三角関数（最大・最小），(3)は数列（等差数列），(4)は数Ⅲ積分法（体積）で，いずれも典型問題である．計算量も少ないので，確実に得点したい．

第２問　図形と方程式（軌跡，円と直線）／式と証明（相加・相乗平均の不等式）【標準】

前半は軌跡を求める問題で，典型的な問題である．問題文に除外点があることも述べられているため，非常にときやすい．(2)は２変数関数の値域を円と直線の共有点考察を利用して求める問題で，これも典型問題である．(3)は(2)が利用できることに気づければ，相加・相乗の利用に容易に気づけるだろう．完答したい問題である．

第３問　ベクトル（空間座標）【標準】

(1)は平面の法線ベクトルを求める問題，(2)は(1)の法線ベクトルを利用して，球面と平面の交わりの円の中心と半径を求める問題で，ここまでは落とせない．(3)は類題を解いた経験がない人は解きづらく感じたかもしれない．差がつきそうな問題である（本年の日本医科大でも出題されていた）．

第４問　数Ⅲ積分法（回転体の体積，定積分と不等式）【標準】

(1)はグラフの共有点，(2)は面積，(3)は x 軸回転体の体積と，いずれも簡単な問題であるため確実に得点したい．(4)は難しく感じた人も多いかもしれないが，$y=\sin x$ の対称性と，(1)のグラフの上下関係を用いることに気づいた人は容易に解けたであろう．

【　解　答　】

第１問 ⑴　ア：9，イ：0　　⑵　ウ：5，エ：1，オ：1，カ：5，
⑶　キ：5，ク：3，ケ：2，コ：3，　⑷　サ：5，シ：6，ス：1，セ：5

第２問 ⑴　ア：2，イ：1，ウ：1，エ：2，オ：0，　⑵　カ：0，キ：8，ク：5，
⑶　ケ：2，コ：1，サ：8，シ：5，

第３問 ⑴　ア：2，イ：3，　⑵　ウ：1，エ：2，オ：1，カ：3，キ：2，ク：2，ケ：2，
⑶　コ：1，サ：4，シ：2，ス：7

第４問 ⑴　ア：0，イ：1，ウ：2，　⑵　エ：1，オ：1，カ：4　⑶　キ：1，ク：1，ケ：2，コ：2
⑷　解説参照

【　解　説　】

1

(1)　$\sin(\theta+90°)=\cos\theta$ より　$\sin^2(\theta+90°)=\cos^2\theta$

これを用いると

$$\sin^2 0°+\sin^2 1°+\sin^2 2°+\cdots+\sin^2 90°+\sin^2(1°+90°)+\sin^2(2°+90°)+\cdots\cdots+\sin^2(90°+90°)$$

$$=\sin^2 0°+\sin^2 1°+\sin^2 2°+\cdots+\sin^2 90°+\cos^2 1°+\cos^2 2°+\cdots\cdots+\cos^2 90°$$

$$=0+(\sin^2 1°+\cos^2 1°)+(\sin^2 2°+\cos^2 2°)+\cdots+(\sin^2 90°+\cos^2 90°)$$

$$=\mathbf{90}$$

(2)　$f(x)=3(2\cos^2 x-1)+(1-\cos^2 x)-2\cos x$

$$=5\cos^2 x-2\cos x-2$$

$$=5\left(\cos x-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{11}{5}$$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから，

$\cos x=\dfrac{1}{5}$ のとき　最小値 $\mathbf{-\dfrac{11}{5}}$，

$\cos x=-1$ のとき　最大値 $\mathbf{5}$

をとる．

(3)　$S_{100}-2S_{101}+S_{102}=5$ より　$S_{102}-S_{101}-(S_{101}-S_{100})=5$

$S_{102}-S_{101}=a_{102}$，$S_{101}-S_{100}=a_{101}$ であるから　$a_{102}-a_{101}=5$

よって，数列 $\{a_n\}$ の公差は $\mathbf{5}$ である．

また，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=a_{140}+5(n-140)=1111+5(n-140)=5n+411$

$a_n=2026$ のとき　$5n+411=2026$　　$\therefore$　$n=\mathbf{323}$

(4)　求める体積は，右図の斜線部分を $y=2$ の周りに回転させて得られる立体の体積であるから，y 軸に関する対称性に注意すると，

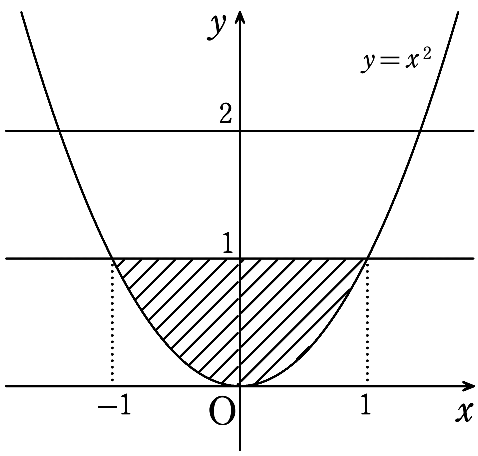
$$\frac{V}{2}=\int_0^1\pi\{(2-x^2)^2-1^2\}\,dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^4-4x^2+3)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+3x\right]_0^1$$

$$=\frac{28}{15}\pi$$

よって，　$V=\mathbf{\dfrac{56}{15}\pi}$



2

(1)　$\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと，$s^2+(t-3)^2=9$　……①

△PABの重心 $\mathrm{G}(a,\ b)$ は，3点P，A，Bが同一直線上にあるとき存在しないから

$t \neq 0$　……②

このとき，

$$a=\frac{s+1+5}{3}=\frac{1}{3}(s+6) \iff s=3a-6$$

$$b=\frac{t+0+0}{3}=\frac{t}{3} \iff t=3b$$

これらを①に代入すると

$(3a-6)^2+(3b-3)^2=9$

$9(a-2)^2+9(b-1)^2=9$　　$\therefore$　$(a-2)^2+(b-1)^2=1$　……③

②と $t=3b$ より　$b \neq 0$

これと③より　$a \neq 2$

よって，重心Gの軌跡 C' は，中心 $(2,\ 1)$，半径1の円から，点 $(2,\ 0)$ を除いた図形である．

(2)　$\dfrac{3b}{a+2}=k$ とおくと　$b=\dfrac{k}{3}(a+2)$　……①

これは ab 平面において，$(-2,\ 0)$ を通る傾き $\dfrac{k}{3}$ の直線を表す．

これが(1)で求めた ab 平面上の円

$(a-2)^2+(b-1)^2=1$　……②，$(a,\ b) \neq (2,\ 0)$

と共有点をもつときの，k のとり得る値の範囲が求めるものである．

直線①と円②が共有点をもつのは　$\dfrac{|2k-3+2k|}{\sqrt{k^2+9}} \leqq 1$　　$\therefore$　$|4k-3| \leqq \sqrt{k^2+9}$

両辺正であるから，2乗して整理すると

$16k^2-24k+9 \leqq k^2+9$

$k(5k-8) \leqq 0$　　$\therefore$　$0 \leqq k \leqq \dfrac{8}{5}$

ただし，$k=0$ のとき①より $b=0$ となり，$(a,\ b) \neq (2,\ 0)$ を満たさない．

したがって，$k=\dfrac{3b}{a+2}$ のとり得る値の範囲は　$\mathbf{0<k \leqq \dfrac{8}{5}}$

(3)　(2)の $k=\dfrac{3b}{a+2}$ を用いると　$\dfrac{(3b)^2+(a+2)^2}{3b(a+2)}=\dfrac{\left(\dfrac{3b}{a+2}\right)^2+1}{\dfrac{3b}{a+2}}=\dfrac{k^2+1}{k}=k+\dfrac{1}{k}$

(2)より $0<k \leqq \dfrac{8}{5}$ であるから，相加・相乗平均の不等式により

$$k+\frac{1}{k} \geqq 2\sqrt{k \cdot \frac{1}{k}}=2$$

等号が成立するのは $k=\dfrac{1}{k}$ かつ $0<k \leqq \dfrac{8}{5}$　$\iff$　$k=1$

よって，$\dfrac{(3b)^2+(a+2)^2}{3b(a+2)}$ の最小値は **2**

また，最小値をとるとき　$k=\dfrac{3b}{a+2}=1$　　$\therefore\quad a=3b-2$

これを ② に代入すると　$(3b-4)^2+(b-1)^2=1$

$$5b^2-13b+8=0$$

$$(5b-8)(b-1)=0 \qquad \therefore\quad b=1,\ \frac{8}{5}$$

3

(1)　$\vec{n}=(1,\ y,\ z)$ とおく．

$\overrightarrow{AB}=\left(-7,\ \frac{7}{2},\ 0\right)=-7(2,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=\left(-7,\ 0,\ \frac{7}{3}\right)=-\frac{7}{3}(3,\ 0,\ -1)$

$\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$ より $-\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$ であるから　$2-y=0$　　$\therefore$　$y=2$

$\overrightarrow{AC}\perp\vec{n}$ より $-\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$ であるから　$3-z=0$　　$\therefore$　$z=3$

よって，　$\vec{n}=(1,\ 2,\ 3)$

(3)　平面 α は $A(7,\ 0,\ 0)$ を通り $\vec{n}$ に垂直であるから，その方程式は

$$1\cdot(x-7)+2\cdot(y-0)+3\cdot(z-0)=0 \qquad \therefore\ x+2y+3z-7=0 \quad \cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{OP}/\!/\vec{n}$ であるから，ある実数 k が存在して

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{n}=(k,\ 2k,\ 3k)$$

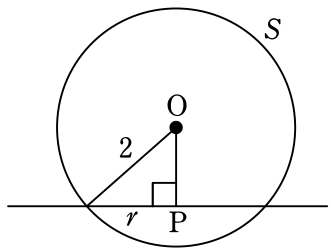
と表せる．

点Pは平面 α 上の点で，① を満たすから　$k+2\cdot 2k+3\cdot 3k-7=0$　　$\therefore$　$k=\frac{1}{2}$

よって，　$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$　　$\therefore$　$P\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$

また，$|\vec{n}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$ であるから，

$$|\overrightarrow{OP}|=\left|\frac{1}{2}\vec{n}\right|=\frac{\sqrt{14}}{2}$$



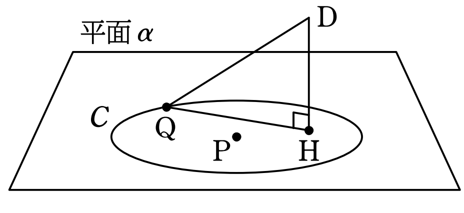
円 C の半径を r とすると，三平方の定理より

$$r=\sqrt{2^2-|\overrightarrow{OP}|^2}=\sqrt{4-\frac{14}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dから平面 α へ垂線DHを下ろすと　$|\overrightarrow{DQ}|^2=|\overrightarrow{DH}|^2+|\overrightarrow{HQ}|^2$

$\overrightarrow{DH}/\!/\vec{n}$ であるから，ある実数 l が存在して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{OD}+l\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)+l(1,\ 2,\ 3)\\&=(l+1,\ 2l+1,\ 3l+1)\end{aligned}$$



と表せる．

点Hは平面 α 上の点で，① を満たすから

$$l+1+2(2l+1)+3(3l+1)-7=0 \qquad \therefore\ l=\frac{1}{14}$$

よって，$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{15}{14},\ \frac{8}{7},\ \frac{17}{14}\right)$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}&=\left(\frac{15}{14},\ \frac{8}{7},\ \frac{17}{14}\right)-\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)\\&=\left(\frac{4}{7},\ \frac{1}{7},\ -\frac{2}{7}\right)=\frac{1}{7}(4,\ 1,\ -2)\end{aligned}$$

したがって，

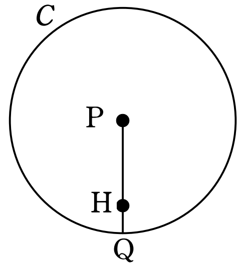
$$|\overrightarrow{PH}|=\frac{1}{7}\sqrt{16+1+4}=\frac{\sqrt{21}}{7}<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であるから，点Hは円Cの内部の点である．

$\left|\overrightarrow{DH}\right|=\left|\dfrac{1}{14}\vec{n}\right|=\dfrac{\sqrt{14}}{14}$ であるから，　$\left|\overrightarrow{DQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{DH}\right|^2+\left|\overrightarrow{HQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{HQ}\right|^2+\dfrac{1}{14}$

よって，$\left|\overrightarrow{DQ}\right|$ が最小となるのは $\left|\overrightarrow{HQ}\right|$ が最小となるときで，

これはP，H，Qがこの順で一直線上に並ぶときである．



このとき，

$$\left|\overrightarrow{HQ}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|-\left|\overrightarrow{PH}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{7\sqrt{2}-2\sqrt{21}}{14}$$

したがって，$\left|\overrightarrow{DQ}\right|^2$ の最小値は

$$\left(\frac{7\sqrt{2}-2\sqrt{21}}{14}\right)^2+\frac{1}{14}=\frac{98-28\sqrt{42}+82+14}{14^2}=\frac{196-28\sqrt{42}}{14^2}$$

$$=1-\frac{\sqrt{42}}{7}$$

別解(1)　$\vec{n}$ は外積から求めてもよい．

$\overrightarrow{AB}=\left(-7,\ \dfrac{7}{2},\ 0\right)=-7(2,\ -1,\ 0)$，　$\overrightarrow{AC}=\left(-7,\ 0,\ \dfrac{7}{3}\right)=-\dfrac{7}{3}(3,\ 0,\ -1)$ であるから，

$$-\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}\times\left(-\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right)=(1-0,\ -(-2-0),\ 2-0)=(1,\ 2,\ 3)$$

よって　$\vec{n}=(1,\ 2,\ 3)$

別解(1)　点Pは正射影ベクトルを用いると容易に求まる．

$\overrightarrow{OA}=(7,\ 0,\ 0)$，$\vec{n}=(1,\ 2,\ 3)$ より

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=7+0+0=7,\ \left|\vec{n}\right|^2=1+4+9=14$$

$\overrightarrow{OP}$ は $\overrightarrow{OA}$ の $\vec{n}$ への正射影ベクトルであるから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}=\frac{7}{14}(1,\ 2,\ 3)=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$$

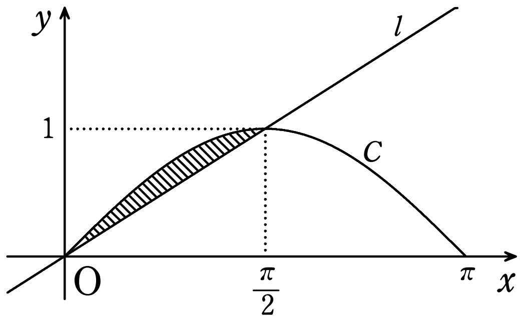
$$\therefore\quad P\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$$

4

(1) 曲線 C と直線 l を図示すると，右の図のようになる．

よって，これらの共有点の x 座標は　$x=0,\ \dfrac{1}{2}\pi$

また，D は図の斜線部分である．



(2) 求める面積をとすると，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}$$
$$=1-\frac{1}{4}\pi$$

(3) 求める体積を V とすると，

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^2 x\,dx-\frac{1}{3}\times\pi\cdot 1^2\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx-\frac{\pi^2}{6}$$
$$=\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}$$
$$=\frac{1}{12}\pi^2$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin(\pi-x)}\,dx$

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin(\pi-x)}\,dx$ において $t=\pi-x$ とおくと　$dx=-dt$，

x	$\frac{\pi}{2}$ → π
t	$\frac{\pi}{2}$ → 0

よって　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin(\pi-x)}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{\sin t}\cdot(-1)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin t}\,dt$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\pi}e^{\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx$　……①

(1) のグラフより，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{2}{\pi}x\leqq\sin x$　　$\therefore$　$e^{\frac{2}{\pi}x}\leqq e^{\sin x}$

両辺を $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定積分すると，等号は常には成り立たないから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{\pi}x}\,dx=\Big[\frac{\pi}{2}e^{\frac{2}{\pi}x}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}(e-1)\quad\cdots\cdots②$$

①，② より　$\displaystyle\int_0^{\pi}e^{\sin x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx>2\cdot\frac{\pi}{2}(e-1)=\pi(e-1)$

$\therefore$　$\displaystyle\int_0^{\pi}e^{\sin x}\,dx>\pi(e-1)$　(証明終)