解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2026年度　杏林大学

【　講　評　】

大問３題で出題された．例年通り，問題Ⅲが解きづらい問題であったことに加え，問題Ⅰも解きづらい問題であり，全体的な得点率が低くなることが予想される．比較的解きやすい問題Ⅱを確実に得点するなど，試験時間内での立ち回り方が大きく影響しただろう．全体で55％程度の得点を確保できれば１次通過の可能性が高いと思われる．以下，大問ごとに特徴を述べる．

問題Ⅰ　いろいろな曲線（媒介変数表示，2次曲線，複素数平面）【やや難】

(a) の前半は指示通りに計算するだけであるが，後半は曲線の回転移動の経験がないと難しく，止まってしまった人が多いのではないだろうか．ここが解ければ，(b) は楕円に関する典型問題であるため，差がつきそうな問題である．

問題Ⅱ　整数の性質（ n 進法，剰余の計算）【標準】

自然数を３進法で表したときの各位の数の和を求める問題であった．2020年に出題された問題の類題である． n 進法に苦手意識がなければ，問題文の誘導にしたがって空欄を埋めていけるだろう．空欄さえ埋められれば良いので，厳密な論証は避け，具体例で考えてしまうなど，杏林大入試特有の要領の良さが鍵となる．

問題 Ⅲ　数Ⅲ微分法（接線，速度，加速度）／数Ⅲ積分法（曲線の長さ）【やや難】

極方程式で与えられた曲線に関する問題であった．(a) は頻出な無限等比級数と，曲線の長さに関する問題であり，計算も煩雑でないため落とせない．(b) の極限は図の様子と式を連携させて考える必要があり，解答しづらい．(c) に影響しない設問であるため，飛ばしても良いだろう．(c) は計算が煩雑なだけであるが，試験時間を考えると正解が出しづらい問題だろう．

【　解　答　】

Ⅰ. (a)　ア：3,　イ：4,　ウ：5,　エ：2,　オ：5,　カ：2,　キ：2,　ク：1　ケ：2,　コ：3,　サ：6,
シ：−,　ス：1,　セ：3,　ソ：7,　タ：−,　チ：1
(b)　ツ：0,　テ：1,　ト：0,　ナ：3,　ニ：5,　ヌ：−,　ネ：1,　ノ：3

Ⅱ. (a)　ア：5,　イウ：16,　エ：③,　オ：⑥,　カ：⑦,　キ：6,　ク：1,　ケ：②,　コ：①,
(b)　サ：1,　シ：②,　ス：⑨,
(c)　セ：4,　ソ：8,　タ：8,　チ：3,　ツ：2,　テ：4,　ト：1,　ナ：6,　ニ：0,
ヌ：4,　ネ：8,　ノ：6

Ⅲ. (a)　ア：3,　イ：1,　ウ：3,　エ：9,　オ：3,　カ：5,　キ：5,　ク：9,　ケ：−,　コ：4,
サ：3,　シ：4,　ス：0,　セ：4,　ソ：3,
(b)　タ：3,　チ：5,　ツ：3,　テ：2,　ト：5,　ナ：8,　ニ：−,　ヌ：3,　ネ：4,

【　解　説　】

Ⅰ

(a)

$$\begin{cases} x=1+\cos t-\sqrt{5}\sin t & \cdots\cdots ① \\ y=1+\cos t+\sqrt{5}\sin t & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①+② より，　$x+y=2+2\cos t$　　$\therefore$　$\cos t=\dfrac{x+y}{2}-1$

②−① より，　$y-x=2\sqrt{5}\sin t$　　$\therefore$　$\sin t=\dfrac{y-x}{2\sqrt{5}}$

これらを　$\cos^2 t+\sin^2 t=1$　に代入すると，

$$\left(\frac{x+y}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y-x}{2\sqrt{5}}\right)^2=1 \iff \frac{x^2+2xy+y^2}{4}-(x+y)+1+\frac{y^2-2xy+x^2}{20}=1$$

$$\iff \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)(x^2+y^2)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)xy-(x+y)=0$$

$$\iff \frac{3}{10}(x^2+y^2)+\frac{2}{5}xy-(x+y)=0$$

$$\therefore \frac{3_{ア}}{4_{イ}}(x^2+y^2)+xy-\frac{5_{ウ}}{2_{エ}}(x+y)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

また，

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\{(1+\cos t)-\sqrt{5}\sin t\}^2+\{(1+\cos t)+\sqrt{5}\sin t\}^2}=\sqrt{2(1+\cos t)^2+10\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{1+2\cos t+\cos^2 t+5\sin^2 t}=\sqrt{2}\sqrt{-4\cos^2 t+2\cos t+6}=2\sqrt{-2\cos^2 t+\cos t+3}$$
$$=2\sqrt{-2\left(\cos t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}}$$

t は実数より $-1\leqq\cos t\leqq 1$ であるから，OP が最大値をとるのは $\cos t=\dfrac{1}{4}$ のときで，その最大値は

$$2\sqrt{\frac{25}{8}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5_{オ}}{2_{カ}}\sqrt{2_{キ}}$$

x について，

$$x=-\sqrt{5}\sin t+\cos t+1=\sqrt{6}\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\sin t+\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t\right)+1$$
$$=\sqrt{6}\sin(t+\alpha)$$

ただし α は，$\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{5}{6}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ を満たす $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ の定角である.

t は実数であるから，x が最大となるのは　$t+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　　$\therefore$　$t=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

このとき，

$$y=1+\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1+\sqrt{5}\cos\alpha+\sin a$$
$$=1+\sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)+\frac{1}{\sqrt{6}}=1-\frac{4}{\sqrt{6}}$$
$$=1_{ク}-\frac{2_{ケ}}{3_{コ}}\sqrt{6_{サ}}$$

C の方程式③を $f(x,\ y)=0$ とすると，　$f(y,\ x)=0 \iff f(y,\ x)=0$

よって，C は $y=x$ に関して対称であるから，複素数平面を用いて C を $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた曲線 C' を考える.

曲線 C' 上の点を $(X,\ Y)$ とすると，

$$x+yi=(X+Yi)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Yi)(1+i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{X-Y+(X+Y)i\}$$

$$\therefore\quad x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

これらを③に代入して，

$$\frac{3}{4}\left\{\frac{(X-Y)^2+(X+Y)^2}{2}\right\}+\frac{X^2-Y^2}{2}-\frac{5}{2}\frac{2X}{\sqrt{2}}=0 \iff \frac{3}{4}(X^2+Y^2)+\frac{X^2-Y^2}{2}-\frac{5}{\sqrt{2}}X=0$$

$$\iff \frac{5}{4}X^2+\frac{1}{4}Y^2-\frac{5}{\sqrt{2}}X=0 \iff X^2-2\sqrt{2}X+\frac{Y^2}{5}=0 \iff (X-\sqrt{2})^2+\frac{Y^2}{5}=2$$

$$\therefore\quad \frac{(X-\sqrt{2})^2}{2}+\frac{Y^2}{10}=1$$

よって，曲線 C' は楕円であり，曲線 C も楕円であることがわかる.

楕円 C' の焦点の座標は $(\sqrt{2},\ \pm2\sqrt{2})$ であるから，これらを原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させると，

$$(\sqrt{2}\pm2\sqrt{2}i)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=(1\pm2i)(1+i)=-1+3i,\ 3-i$$

よって，楕円 C の焦点の座標は　$\mathrm{E}(-1_{\text{シス}},\ 3_{\text{セ}})$，　$\mathrm{F}(3_{\text{ソ}},\ -1_{\text{タチ}})$

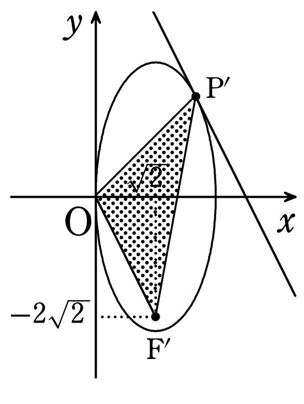
楕円 C' の焦点を $\mathrm{F'}(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$，楕円 C' 上の点を $\mathrm{P'}$ とし，三角形 $\mathrm{OF'P'}$ の面積が最大となるのは，点 $\mathrm{P'}$ が第1象限にあり，接線の傾きが $\mathrm{OF'}$ の傾きと等しくなるときである.

$\mathrm{P'}(p,\ q)\ (p>0,\ q>0)$ とおくと，この点における C' の接線の方程式は

$$\frac{(p-\sqrt{2})(X-\sqrt{2})}{2}+\frac{qY}{10}=1\qquad\therefore\quad Y=-\frac{5(p-\sqrt{2})}{q}(X-\sqrt{2})+\frac{10}{q}$$

$\mathrm{OF'}$ の傾きは $\dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-2$ であるから，　$-\dfrac{5(p-\sqrt{2})}{q}=-2\qquad\therefore\quad p-\sqrt{2}=\dfrac{2}{5}q$

$\dfrac{(p-\sqrt{2})^2}{2}+\dfrac{q^2}{10}=1$ に代入すると　$\dfrac{2}{25}q^2+\dfrac{q^2}{10}=1\qquad\therefore\quad q^2=\dfrac{50}{9}$



$q>0$ であるから　$q=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

このとき　$p=\dfrac{2}{5}q+\sqrt{2}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

よって，$\mathrm{P'}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{5\sqrt{2}}{3}\right)$ であるから，これを原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させて，

$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{3}+\frac{5\sqrt{2}}{3}i\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{3}(1+i)^2=\frac{10}{3}i$$

したがって，三角形 OFP の面積が最大となるときの P の座標は　$\mathrm{P}\left(0_{\text{ツ}},\ \dfrac{10_{\text{テト}}}{3_{\text{ナ}}}\right)$

また，このときの点 P における接線の傾きは，$\tan\gamma=-2$ とすると，

$$\tan\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\gamma+1}{1-\tan\gamma\cdot1}=\frac{-2+1}{1-(-2)}=\frac{-1_{\text{ヌネ}}}{3_{\text{ノ}}}$$

別解

O，F(3，-1)，P$(1+\cos t-\sqrt{5}\sin t,\ 1+\cos t+\sqrt{5}\sin t)$ を頂点とする三角形の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\left|3(1+\cos t+\sqrt{5}\sin t)-(-1)(1+\cos t-\sqrt{5}\sin t)\right|=\frac{1}{2}\left|2\sqrt{5}\sin t+4\cos t+4\right|$$

$$=\left|\sqrt{5}\sin t+2\cos t+2\right|=\left|3\sin(t+\beta)+2\right|$$

ただし，β は $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\sin\beta=\dfrac{2}{3}$ を満たす $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ の定角である.

S が最大となるのは　$t+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　$\therefore$　$t=\dfrac{\pi}{2}-\beta$

このとき最大値 $5_{\text{ニ}}$ をとる.

また，$t=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ のとき

$$x=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=1+\sin\beta-\sqrt{5}\cos\beta$$

$$=1+\frac{2}{3}-\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=0$$

$$y=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=1+\sin\beta+\sqrt{5}\cos\beta$$

$$=1+\frac{2}{3}+\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{10}{3}$$

であるから，このときの点 P の座標は　$\mathrm{P}\left(0_{\text{ツ}},\ \dfrac{10_{\text{テト}}}{3_{\text{ナ}}}\right)$

また,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t+\sqrt{5}\cos t}{-\sin t-\sqrt{5}\cos t}$$

より，点 P における曲線 C の接線の傾きは,

$$\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\sqrt{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sqrt{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}=\frac{-\cos\beta+\sqrt{5}\sin\beta}{-\cos\beta-\sqrt{5}\sin\beta}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}+\sqrt{5}\cdot\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}-\sqrt{5}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{-1_{\text{ヌネ}}}{3_{\text{ノ}}}$$

Ⅱ

(a)

$f(23)=f(2\cdot3^2+1\cdot3+2)=f(212_{(3)})=2+1+2=\mathbf{5}_{ア}$

$f(n)=4$ を満たす n は，小さい方から，

$22_{(3)}=2\cdot3+2=8$ ， $112_{(3)}=1\cdot3^2+1\cdot3+2=14$ ， ……

よって，2番目に小さい n は， $\mathbf{14}_{イウ}$

$m=a_k\cdot3^k+a_{k-1}\cdot3^{k-1}+\cdots\cdots+a_1\cdot3+a_0$ （a_0 ～ a_k は0，1，2のいずれか）とすると， $f(m)=\sum_{i=0}^{k}a_i$ であり，

$f(3m)=f(a_k\cdot3^{k+1}+a_{k-1}\cdot3^k+a_1\cdot3^2+a_0\cdot3)=\sum_{i=0}^{k}a_i=f(m)$ ∴ ③$_{エ}$ ，

$f(3m+1)=f(a_k\cdot3^{k+1}+a_{k-1}\cdot3^k+a_1\cdot3^2+a_0\cdot3+1)=\sum_{i=0}^{k}a_i+1=f(m)+1$ ∴ ⑥$_{オ}$ ，

$f(3m+2)=f(a_k\cdot3^{k+1}+a_{k-1}\cdot3^k+a_1\cdot3^2+a_0\cdot3+2)=\sum_{i=0}^{k}a_i+2=f(m)+2$ ∴ ⑦$_{カ}$

これらを用いると，

$$\begin{aligned}f(2026)&=f(3\cdot675+1)=f(675)+1=f(3\cdot225)+1=f(225)+1=f(3\cdot75)+1=f(75)+1=f(3\cdot25)+1\\&=f(25)+1=f(3\cdot8+1)+1=f(8)+1+1=f(3\cdot2+2)+2=f(2)+2+2=f(2_{(3)})+4=2+4\\&=\mathbf{6}_{キ}\end{aligned}$$

また，

$f(3^m)=f(1\cdot3^m)=f(1000\cdots\cdots00_{(3)})=\mathbf{1}_{ク}$ ，

$f(3^m-1)=f(\underbrace{222\cdots\cdots22}_{m\text{桁}}{}_{(3)})=2m$ ∴ ②$_{ケ}$ ，

$f\left(\dfrac{3^m-1}{2}\right)=f(\underbrace{111\cdots\cdots11}_{m\text{桁}}{}_{(3)})=m$ ∴ ①$_{ケ}$

(b)

以下の合同式は，2を法とする．

$3^m\equiv1^m\equiv1$ であるから，3^m を2で割った余りは $\mathbf{1}_{サ}$

これを用いると，

$n=A\cdot3^3+B\cdot3^2+C\cdot3+D\equiv A+B+C+D=f(n)$

よって，

$\boldsymbol{n-f(n)}$ (②$_{シ}$) は2で割り切れ， $\boldsymbol{n-D}$ (⑨$_{ス}$) は3で割り切れる

ことがわかる．

(c)

$80=3^{\mathbf{4}_{セ}}-1$ であることから，(a) の結果を用いると，

$f(80)=f(3^4-1)=2\cdot4=\mathbf{8}_{ソ}$

$80<81=3^4$ であるから，80未満の自然数 k は $k=ABCD_{(3)}$ と表せ，

$f(k)=A+B+C+D$

$$
\begin{aligned}
f(80-k)&=f(3^4-1-A\cdot 3^3-B\cdot 3^2-C\cdot 3-D)=f((3-A)\cdot 3^3-B\cdot 3^2-C\cdot 3-D-1)\\
&=f((2-A)\cdot 3^3+(3-B)\cdot 3^2-C\cdot 3-D-1)=f((2-A)\cdot 3^3+(2-B)\cdot 3^2+(3-C)\cdot 3-D-1)\\
&=f((2-A)\cdot 3^3+(2-B)\cdot 3^2+(2-C)\cdot 3+2-D)=2-A+2-B+2-C-2-D\\
&=8-(A+B+C+D)
\end{aligned}
$$

よって，　$f(k)+f(80-k)=\mathbf{8}_{タ}$　であり，これは $k=0$ のときも成り立つ．

これを用いると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{80}f(k)&=\sum_{k=0}^{39}f(k)+f(40)+\sum_{k=41}^{80}f(k)=\sum_{k=0}^{39}f(k)+\sum_{k=0}^{39}f(80-k)+f(40)=\sum_{k=0}^{39}\{f(k)+f(80-k)\}+f(40)\\
&=\sum_{k=0}^{39}8+f(1\cdot 3^3+1\cdot 3^2+1\cdot 3+1)=8\cdot 40+1+1+1+1\\
&=\mathbf{324}_{チツテ}
\end{aligned}
$$

また，

$$
\sum_{k=1}^{80}f(2\cdot 3^{k-1})=\sum_{k=1}^{80}f(2000\cdots\cdots 00_{(3)})=\sum_{k=1}^{80}2=\mathbf{160}_{トナニ}
$$

であり，(a) の結果を用いると，

$$
\sum_{k=0}^{80}f(3k+2)=\sum_{k=0}^{80}\{f(k)+2\}=\sum_{k=0}^{80}f(k)+2\cdot 81=324+162=\mathbf{486}_{ヌネノ}
$$

Ⅲ

(a)

曲線 D は,

$$\begin{cases} x=3e^{-\frac{3}{4}\theta}\cos\theta \\ y=3e^{-\frac{3}{4}\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \left(\theta \geqq -\frac{\pi}{4}\right)$$

と表せ, $r=3e^{-\frac{3}{4}\theta}$ は減少関数であるから,

$$\mathrm{A}_0(3,\ 0),\ \mathrm{A}_1\left(3^{-\frac{3}{4}\cdot 2\pi},\ 0\right),\ \mathrm{A}_2\left(3e^{-\frac{3}{4}\cdot 4\pi},\ 0\right),\ \mathrm{A}_3\left(0,\ 3e^{-\frac{3}{4}\cdot 6\pi}\right),\quad \cdots\cdots$$

であり, $\mathrm{OA}_k=3e^{-\frac{3}{4}\cdot 2k\pi}=3e^{-\frac{3k}{2}\pi}=3\left(e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)^k$

$\mathrm{OA}_1=3e^{-\frac{3}{2}\pi}=a$ より, OA_k ($k=0$, 1 , 2 , …) は初項 $3_{\text{ア}}$, 公比 $e^{-\frac{3}{2}\pi}=\dfrac{1_{\text{イ}}}{3_{\text{ウ}}}a$ の等比数列である.

$0<\dfrac{1}{3}a<1$ であるから, この無限等比級数は収束し, その和は,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{OA}_k=\frac{3}{1-\frac{1}{3}a}=\frac{9_{\text{エ}}}{3_{\text{オ}}-a}$$

また,

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}&=\sqrt{\left(-\frac{9}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}\cos\theta-3e^{-\frac{3}{4}\theta}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{9}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}\sin\theta+3e^{-\frac{3}{4}\theta}\cos\theta\right)^2}\\&=\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}\sqrt{(3\cos\theta+4\sin\theta)^2+(4\cos\theta-3\sin\theta)^2}\\&=\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}\sqrt{25(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\frac{15}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}\end{aligned}$$

より, 点 A_0 から点 A_2 までの曲線 D の長さは,

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\frac{15}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}d\theta=\left[-5e^{-\frac{3}{4}\theta}\right]_0^{\pi}=5-5e^{-\frac{3}{4}\cdot\pi}=5-5\cdot\left(\frac{1}{3}a\right)^2=5_{\text{カ}}-\frac{5_{\text{キ}}}{9_{\text{ク}}}a^2$$

(b)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\frac{9}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}\sin\theta+3e^{-\frac{3}{4}\theta}\cos\theta}{-\frac{9}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}\cos\theta-3e^{-\frac{3}{4}\theta}\sin\theta}=\frac{-3\sin\theta+4\cos\theta}{-3\cos\theta-4\sin\theta}$$

であり, $\mathrm{A}_0(3,\ 0)$ は曲線 D の $\theta=0$ に対応する点であるから, この点における D の接線は,

$$y=\frac{-3\sin 0+4\cos 0}{-3\cos 0-4\sin 0}(x-3)=\frac{4}{-3}(x-3)$$

$$\therefore\quad y=\frac{-4_{\text{ケコ}}}{3_{\text{サ}}}x+4_{\text{シ}}$$

B_n は曲線 D 上の点であり， $\lim_{n\to\infty}\theta_n=\infty$

まず， B_n が無限に存在することを示す．

任意の自然数 k に対して， $2k\pi\leqq\theta\leqq2(k+1)\pi$ のときに A_0 を通る接線があることを示せば十分である．

A_0 を通る直線について傾きが 0 ならば曲線 D と共有点をもち，傾きが ∞ ならば曲線 D と共有点をもたない．

よって，傾きを連続的に変化させたとき，接線となるものが少なくとも 1 つ存在する．

したがって $\lim_{\theta\to\infty}r=0$ であり，B_n は原点に近づくので， $\lim_{n\to\infty}OB_n=\mathbf{0}_{ス}$

また，$B_n\left(3e^{-\frac{3}{4}\theta_n}\cos\theta_n,\ 3e^{-\frac{3}{4}\theta_n}\sin\theta_n\right)$ について，A_0B_n の傾きと，D の B_n における接線の傾きの一致から，

$$\frac{3e^{-\frac{3}{4}\theta_n}\sin\theta_n}{3e^{-\frac{3}{4}\theta_n}\cos\theta_n-3}=\frac{-3\sin\theta_n+4\cos\theta_n}{-3\cos\theta_n-4\sin\theta_n}$$

左辺について， $\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3e^{-\frac{3}{4}\theta_n}\sin\theta_n}{3e^{-\frac{3}{4}\theta_n}\cos\theta_n-3}=\frac{3\cdot0}{3\cdot0-3}=0$$

であるから，右辺の分子について $\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n\fallingdotseq0$ に注意すると，

$$\lim_{n\to\infty}(-3\sin\theta_n+4\cos\theta_n)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}(-3\tan\theta_n+4)=0\qquad\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n=\frac{\mathbf{4}_{セ}}{\mathbf{3}_{ソ}}$$

(c)

$$\vec{q}=(x,\ y)=3e^{-\frac{3}{4}t}(\cos t,\ \sin t),\qquad|\vec{q}|=3e^{-\frac{3}{4}t},$$

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t}(-3\cos t-4\sin t,\ -3\sin t+4\cos t),\qquad|\vec{v}|=\frac{15}{4}e^{-\frac{3}{4}t}$$

であるから，

$$\cos\phi=\frac{\vec{q}\cdot\vec{v}}{|\vec{q}||\vec{v}|}=\frac{3e^{-\frac{3}{4}t}\cdot\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t}\{\cos t(-3\cos t-4\sin t)+\sin t(-3\sin t+4\cos t)\}}{3e^{-\frac{3}{4}t}\cdot\frac{15}{4}e^{-\frac{3}{4}t}}$$

$$=\frac{-3(\cos^2t+\sin^2t)}{5}=-\frac{\mathbf{3}_{タ}}{\mathbf{5}_{チ}}$$

実数 k，l を用いて $\dfrac{2\vec{a}+k\vec{v}+l\vec{q}}{\frac{3}{8}e^{-\frac{3}{4}t}}=\vec{0}$ ……① とおく．

$\vec{a}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ について，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{9}{16}e^{-\frac{3}{4}t}(-3\cos t-4\sin t)+\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t}(3\sin t-4\cos t)$$

$$=\frac{3}{16}e^{-\frac{3}{4}t}\{3(3\cos t+4\sin t)+4(3\sin t-4\cos t)\}$$

$$=\frac{3}{16}e^{-\frac{3}{4}t}(24\sin t-7\cos t)$$

であるから，① の x 成分に注目すると，

$$24\sin t-7\cos t+k\{2(-3\cos t-4\sin t)\}+l(8\cos t)=0$$

$$(24-8k)\sin t+(-7-6k+8l)\cos t=0$$

これが t についての恒等式となるとき，

$$\begin{cases}24-8k=0\\-7-6k+8l=0\end{cases}\qquad\therefore\quad k=3,\quad l=\frac{7}{8}+\frac{9}{4}=\frac{25}{8}$$

このとき y 成分についても ① が成り立つ．

よって，① より
$$\frac{2\vec{a}+3\vec{v}+\frac{25}{8}\vec{q}}{e^{-\frac{3}{4}t}}=\vec{0}\qquad\therefore\quad 2\vec{a}+3_{ツ}\vec{v}+\frac{25_{テト}}{8_{ナ}}\vec{q}=0$$

これらの係数を用いた z の 2 次方程式 $2z^2+3z+\frac{25}{8}=0$ は

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{9-25}}{4}=\frac{-3_{ニヌ}}{4_{ネ}}\pm i$$

を解にもつ．