

# 2026 年度 昭和医科大学 I 期

## 【 講 評 】

例年通り、大問 4 題で出題された。昨年と比較すると、難易度が大幅に下がり、計算が煩雑なものもないため、かなり解きやすい試験であった。計算ミス等も考慮して、80% の得点を目指したい。以下、大問ごとに特徴を述べる。

### ① 小問集合（数列／指数関数／数学と人間の活動／データの分析，数列／対数関数）【やや易】

(1) は格子点の個数，(2) は指数方程式，(3) は階乗の素因数の個数，(4) は平均，分散，(5) は桁数・最高位の数と、いずれも教科書レベルの問題であった。ここは完答したい。

### ② 数Ⅲ積分法（定積分・数列の極限）【標準】

ウォリス積分に関する出題であった。漸化式や積分結果を暗記していた人にとって、(4) までは容易に解答できるだろう。(5) ははさみうちの原理で極限を求める問題で、類題を解いた経験がない人にとっては解きづらい。差がつきそうである。

### ③ 数Ⅲ微分法（共通接線）【やや易】

2 曲線の共通接線を求める問題であった。定石通り、接点を置いて処理すればよい。後半の最小値も相加・相乗を用いるだけである。完答したい問題である。

### ④ 確率（条件付き確率）【易】

3 人の玉の取り出し方に関する問題で、事象が単純なものであり、解きやすかったであろう。確実に完答したい問題である。

## 【 解 答 】

① (1) 20250, (2)  $x=3$ , (3) 505, (4)  $n=9$ , (5) 桁数 34, 最高位の数 6

② (1)  $I_n$ , (2)  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ , (3)  $\frac{\pi}{2(2n+1)}$ , (4)  $\frac{\pi}{4}$ , (5)  $\frac{1}{\pi}$

③ (1)  $P\left(\frac{3}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}\right)$ ,  $Q\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, -\sqrt{a}\right)$ , (2)  $a=1$  のとき  $d=2\sqrt{2}$

④ (1)  $\frac{1}{5}$ , (2)  $\frac{4}{25}$ , (3)  $\frac{16}{125}$ , (4)  $\frac{64}{125}$ , (5)  $\frac{20}{61}$

お問い合わせは ☎ 0120-302-872

<https://keishu-kai.com/>

# 【 解 説 】

1

(1)  $y = k$  ( $k$  は整数) とすると  $1 \leq 2^k \leq x \leq 2026$

$2^{10} = 1024 < 2026 < 2048 = 2^{11}$  であるから  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$

また,  $2^k \leq x \leq 2026$  を満たす整数  $x$  の個数は  $2026 - 2^k + 1 = 2027 - 2^k$

よって, 求める整数の組  $(x, y)$  の個数は

$$\sum_{k=0}^{10} (2027 - 2^k) = 2027 \cdot 11 - \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 20250$$

(2)  $X = (\sqrt{2})^x = 2^{\frac{x}{2}}$  とすると,

$$\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^3 + \left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 8 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 8 = 0$$

$$X^3 + X^2 - 8X - 8 = 0$$

$$(X+1)(X^2-8)=0 \quad \therefore (X+1)(X-2\sqrt{2})(X+2\sqrt{2})=0$$

$X = 2^{\frac{x}{2}} > 0$  であるから  $X = 2\sqrt{2}$

よって  $2^{\frac{x}{2}} = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} \quad \therefore x = 3$

(3)  $2026!$  を 10 進法で表したときの末尾に並ぶ 0 の個数は,  $2026!$  を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する.

$[x]$  を  $x$  を超えない最大の整数とすると,  $2026!$  に含まれる素因数 5 の個数は

$$\left[\frac{2026}{5}\right] + \left[\frac{2026}{5^2}\right] + \left[\frac{2026}{5^3}\right] + \left[\frac{2026}{5^4}\right] = 405 + 81 + 16 + 3 = 505$$

よって,  $2026!$  を 10 進法で表したとき, 末尾に連続する 0 の個数は 505

(4)  $2n+1$  個のデータを値が小さい順に見ると公差 1 の等差数列であるから, 平均は 0 である.

また, 分散について

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n+1} \{(-n)^2 + (-n+1)^2 + (-n+2)^2 + \dots + 1^2 + 0^2 + 1^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2\} \\ &= \frac{1}{2n+1} \{2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)\} = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

よって, 分散の値が 30 であるとき,  $\frac{n(n+1)}{3} = 30 \quad \therefore n(n+1) = 90 = 9 \cdot 10$

$n$  は整数であるから  $n = 9$

2

(1)  $x = \frac{\pi}{2} - t$  とおくと  $dx = -dt$ ,

$x$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
$t$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

よって  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - t \right) \cdot (-1) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt = I_n$

(2)  $n \geq 3$  のとき, 部分積分法により

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos^{n-1} x \, dx = \left[ -\sin x \cos^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-2} x - \cos^n x) \, dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

よって  $I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2} \quad \therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

(3)  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x \, dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[ \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

よって,  $I_2 = \frac{1}{2} I_0$  が成り立つから, (2) で求めた式は  $n \geq 2$  で成り立つ.

これを用いると

$$I_{2n+1} I_{2n} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n+1} I_{2n-1} I_{2n-2}$$

$$\therefore (2n+1) I_{2n+1} I_{2n} = (2n-1) I_{2n-1} I_{2n-2}$$

$\{(2n+1) I_{2n+1} I_{2n}\}$  は定数列であるから

$$(2n+1) I_{2n+1} I_{2n} = 1 \cdot I_1 \cdot I_0 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad I_{2n+1} I_{2n} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

(4) (3) より  $\lim_{n \rightarrow \infty} n I_{2n+1} I_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\pi}{4}$

(5)  $a_n = \frac{\{(2n)!\}^2 n}{(2^n \cdot n!)^4}$  とおく.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  において  $\cos x \geq 0$  であるから  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \geq 0$

$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$  の各辺に  $I_{2n} (\geq 0)$  をかけると  $I_{2n+1} I_{2n} < (I_{2n})^2 < I_{2n} I_{2n-1}$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} \text{ より } I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1} \text{ であるから}$$

$$I_{2n+1} I_{2n} < (I_{2n})^2 < I_{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}$$

$$\therefore n I_{2n+1} I_{2n} < n (I_{2n})^2 < \left(1 + \frac{1}{2n}\right) n I_{2n} I_{2n+1} \quad \dots\dots ①$$

ここで, (2) を繰り返して用いると

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \\ &= \dots\dots \\ &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \dots\dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$(2n)!! \times (2n-1)!! = (2n)!$ ,  $(2n)!! = 2^n \cdot n!$  であるから,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{\{(2n)!!\}^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{よって } n(I_{2n})^2 = \frac{\{(2n)!\}^2}{(2^n \cdot n!)^4} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} a_n$$

$$\text{したがって ① より } n I_{2n+1} I_{2n} < \frac{\pi^2}{4} a_n < \left(1 + \frac{1}{2n}\right) n I_{2n} I_{2n+1}$$

$$\therefore \frac{4}{\pi^2} \cdot n I_{2n+1} I_{2n} < a_n < \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) n I_{2n} I_{2n+1}$$

このとき (4) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi^2} \cdot n I_{2n+1} I_{2n} = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) n I_{2n} I_{2n+1} = \frac{4}{\pi^2} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\pi}$$

であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{(2n)!\}^2 n}{(2^n \cdot n!)^4} = \frac{1}{\pi}$$

3

$$(1) \quad y = \frac{a^2}{27}x^3 \text{ について } y' = \frac{a^2}{9}x^2$$

$P\left(p, \frac{a^2}{27}p^3\right)$  における接線の方程式は

$$y = \frac{a^2}{9}p^2(x-p) + \frac{a^2}{27}p^3 \quad \therefore y = \frac{a^2p^2}{9}x - \frac{2a^2p^3}{27} \quad \dots\dots①$$

$$y = -\frac{1}{x} \text{ について } y' = \frac{1}{x^2}$$

$Q\left(q, -\frac{1}{q}\right) (q>0)$  における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{q^2}(x-q) - \frac{1}{q} \quad \therefore y = \frac{1}{q^2}x - \frac{2}{q} \quad \dots\dots②$$

①, ②が一致するとき

$$\begin{cases} \frac{a^2p^2}{9} = \frac{1}{q^2} \\ -\frac{2a^2p^3}{27} = -\frac{2}{q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2p^2q^2 = 9 \quad \dots\dots③ \\ a^2p^3q = 27 \quad \dots\dots④ \end{cases}$$

$a>0, q>0$  であるから, ④が成り立つのは  $p>0$  のときで, このとき ③より  $apq=3 \quad \dots\dots⑤$

$$\text{これを④に代入すると } ap^2 \cdot 3 = 27 \quad \therefore p^2 = \frac{9}{a}$$

$$p>0 \text{ であるから } p = \frac{3}{\sqrt{a}}$$

$$\text{このとき⑤より } a \cdot \frac{3}{\sqrt{a}}q = 3 \quad \therefore q = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

よって,  $P\left(\frac{3}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}\right), Q\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, -\sqrt{a}\right)$  であり, ②より直線  $\ell$  の方程式は

$$y = \frac{1}{\frac{1}{a}}x - \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{a}}} \quad \therefore y = ax - 2\sqrt{a}$$

$$(2) \quad (1) \text{ より } PQ = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{a})^2} = \sqrt{\frac{4}{a} + 4a} = 2\sqrt{a + \frac{1}{a}}$$

$a>0$  であるから, 相加・相乗平均の不等式により

$$PQ = 2\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}} = 2\sqrt{2}$$

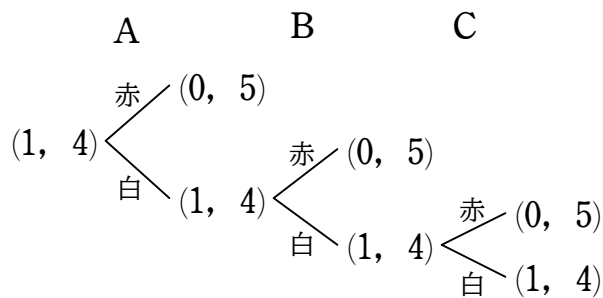
等号が成り立つのは  $a = \frac{1}{a}$  かつ  $a>0 \Leftrightarrow a=1$

よって, 距離  $PQ$  は  $a=1$  のとき, 最小値  $d=2\sqrt{2}$  をとる.

# 4

袋の中に赤玉が  $a$  個、白玉が  $b$  個入っていることを  $(a, b)$  と表す.

このとき、A、B、Cの取り出し方を書き出すと、次のようになる.



(1) Aが取り出した玉が赤玉である確率は  $\frac{1}{5}$

(2) Bが取り出した玉が赤玉であるのは、Aが白玉を取り出し、Bが赤玉を取り出すときであるから、その確率は

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

(3) Cが取り出した玉が赤玉であるのは、A、Bが白玉を取り出し、Cが赤玉を取り出すときであるから、その確率は

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$$

(4) 全員が取り出した後、袋の中に赤玉が残っているのは、全員が白を取り出すときであるから、その確率は

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{125}$$

(5) 全員が取り出した後、袋の中に赤玉が残っていないことの余事象は、全員が白を取り出すことであるから、

(4)よりその確率は

$$1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$$

また、全員が取り出したあと、Bが赤玉を取り出していたのは、Aが白玉、Bが赤玉、Cが白玉を取り出すときであるから、その確率は

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times 1 = \frac{4}{25}$$

よって、全員が取り出したあと、袋の中に赤玉が残っていなかったとき、Bが赤玉を取り出していた条件つき確率は

$$\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}} = \frac{20}{61}$$