解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2026年度　昭和医科大学（Ⅱ期）

【　講　評　】

例年通り，大問4題での出題であった．小問集合が昨年の2題から1題へと減少したため，昨年よりもやや難易度が上がった．また，解法を覚えていないと解けない問題など，やや解きづらい問題が多くなったため，昨年よりも得点しづらいだろう．6割程度の得点を目指したい．以下，大問ごとに特徴を述べる．

1　式と証明（二項定理）【標準】

二項定理を用いて二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ の和を求める典型問題であった．(1)，(2) は問題ないだろう．(3) 以降は (2) の考え方を応用して計算する．類題を解いた経験がないと完答は難しいだろう．

2　小問集合（微分係数，近似／陰関数の微分法／積分方程式／ベクトル）【標準】

(1)，(3) は簡単な計算問題であるから落とせない．(2) は1次近似の知識があるかどうかで出来がわかれそうである．(4) は平面ベクトルの典型問題であるが，計算がやや煩雑で得点しづらい問題であった．

3　数Ⅲ積分法（面積，体積）／2次曲線（楕円の面積）【標準】

(1) は2つの楕円の交点を求めるだけである．(2) は2つの楕円の内部の共通部の面積を求める典型問題である．積分法でも，円に変換しても良いだろう．(3) は非回転体の体積で，z 軸に垂直な断面を (2) から求めることができることに気づけるかどうかがポイントであった．ここは完答したい．

4　場合の数・確率【標準】

条件付き確率に関する問題であった．計算量は少な目であったが，問題文の読解がしっかりとできたかどうかで差がつきそうな問題である．

【　解　答　】

1　(a)　2^n，　(b)　n，　(c)　$n(n+1)$，　(d)　$n^2(n+3)$

2　(1)(1−1)　529，　(1−2)　45.0111，　(2)(2−1)(2−2)　$\dfrac{2x}{y}$，　(2−3)　$\dfrac{-8}{y^2}$

(3)　$1+x^x+2e^2$，　(4)(4−1)(4−2)　$\dfrac{3}{2}$，　(4−3)(4−4)　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3　(1)　$\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\ 0\right)$（複号任意），　(2)　$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2$，　(3)　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi a^3$

4　(1)　$\dfrac{1}{4}$，　(2)(2−1)　$\dfrac{1}{3}$，　(2−2)　$\dfrac{1}{3}$，　(3)(3−1)　$\dfrac{1}{4}$，　(3−2)　$\dfrac{3}{4}$

1

二項定理により　$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,x^k$　……①

(1)　①に $x=1$ を代入すると　$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=(1+1)^n=\boldsymbol{2^n}$

(2)　①の両辺を x で微分すると　$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k kx^{k-1}$　……②

②に $x=1$ を代入すると，　$\sum_{k=0}^{n}k_n\mathrm{C}_k=n(1+1)^{n-1}=\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{2^n}{2}$

(3)　②式の両辺に x をかけると　$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,kx^k$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=n(1+x)^{n-2}\{(1+x)+(n-1)x\}\\&=n(nx+1)(1+x)^{n-2}\end{aligned}$$

$$(\text{右辺})=\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k k^2x^{k-1}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k k^2x^{k-1}$$

であるから

$$n(nx+1)(1+x)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,k^2x^{k-1}\quad\cdots\cdots③$$

③に $x=1$ を代入すると　$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k k^2=n(n+1)(1+1)^{n-2}=\boldsymbol{n(n+1)}\cdot\dfrac{2^n}{2^2}$

(4)　③式の両辺に x をかけると　$nx(nx+1)(1+x)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k k^2x^k$

両辺を x で微分すると

$$n\cdot(nx+1)(1+x)^{n-2}+nx\cdot n\cdot(1+x)^{n-2}+nx(nx+1)\cdot(n-2)(1+x)^{n-3}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k k^3x^{k-1}$$

これに $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k k^3&=n(n+1)(1+1)^{n-2}+n^2(1+1)^{n-2}+n(n+1)(n-2)(1+1)^{n-3}\\&=2n(n+1)\cdot\frac{2^n}{2^3}+2n^2\cdot\frac{2^n}{2^3}+n(n+1)(n-2)\cdot\frac{2^n}{2^3}\\&=\boldsymbol{n^2(n+3)}\cdot\frac{2^n}{2^3}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$　微分を用いずに計算することもできる.

(2)　$1 \leqq k \leqq n$ のとき,

$$k{}_n\mathrm{C}_k = k\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{\{(n-1)-(k-1)\}!(k-1)!}$$
$$= n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

が成り立つから,

$$\sum_{k=0}^{n} k{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} k{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n(1+1)^{n-1} = \boldsymbol{n\cdot\frac{2^n}{2}}$$

(3)　$2 \leqq k \leqq n$ のとき,

$$k(k-1){}_n\mathrm{C}_k = k(k-1)\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)!}{\{(n-2)-(k-2)\}!(k-2)!}$$
$$= n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$$

$$k^2{}_n\mathrm{C}_k = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} + k{}_n\mathrm{C}_k$$

が成り立つから,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=0}^{n}\{k(k-1)+k\}{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=2}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k + \sum_{k=0}^{n} k{}_n\mathrm{C}_k$$
$$= \sum_{k=2}^{n} n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} + n\cdot\frac{2^n}{2}$$
$$= n(n-1)(1+1)^{n-2} + n\cdot\frac{2^n}{2}$$
$$= n(n-1)\cdot\frac{2^n}{2^2} + 2n\cdot\frac{2^n}{2^2}$$
$$= \boldsymbol{n(n+1)\cdot\frac{2^n}{2^2}}$$

(3)　$3 \leqq k \leqq n$ のとき,

$$k(k-1)(k-2){}_n\mathrm{C}_k = k(k-1)(k-2)\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-3)!}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{\{(n-3)-(k-3)\}!(k-3)!}$$
$$= n(n-1)(n-2){}_{n-3}\mathrm{C}_{k-3}$$

が成り立つから

$$\sum_{k=0}^{n} k^3{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=0}^{n}\left\{k(k-1)(k-2){}_n\mathrm{C}_k + 3k^2{}_n\mathrm{C}_k - 2k{}_n\mathrm{C}_k\right\}$$
$$= n(n-1)(n-2)\sum_{k=3}^{n}{}_{n-3}\mathrm{C}_{k-3} + 3\sum_{k=0}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k - 2\sum_{k=0}^{n} k{}_n\mathrm{C}_k$$
$$= n(n-1)(n-2)(1+1)^{n-3} + 3n(n+1)\cdot\frac{2^n}{2^2} - 2n\cdot\frac{2^n}{2}$$
$$= \{n(n-1)(n-2) + 6n(n+1) - 8n\}\cdot\frac{2^n}{2^3}$$
$$= \boldsymbol{n^2(n+3)\cdot\frac{3^n}{2^3}}$$

別解　次のように解くこともできる.

$$(2+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n}\left\{{}_n\mathrm{C}_k\left(\sum_{l=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_l x^l\right)\right\}$$

について,

$$(\text{左辺})=2^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 2^{n-1}x+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2^{n-2}x^2+{}_n\mathrm{C}_3\cdot 2^{n-3}x^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n x^n,$$

$$(\text{右辺})=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k({}_k\mathrm{C}_0+{}_k\mathrm{C}_1x+{}_k\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_kx^k)$$

であるから, x^0, x^1, x^2, x^3 の係数を比較すると,

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k \quad \cdots\cdots①$$

$${}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_k\mathrm{C}_1 \iff n\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k \quad \cdots\cdots②$$

$${}_n\mathrm{C}_2 2^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_k\mathrm{C}_2 \iff n(n-1)\cdot 2^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k \quad \cdots\cdots③$$

$${}_n\mathrm{C}_3 2^{n-3}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_k\mathrm{C}_3 \iff n(n-1)(n-2)\cdot 2^{n-3}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)(k-2)\,{}_n\mathrm{C}_k \quad \cdots\cdots④$$

(1)　① より　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=\boldsymbol{2^n}$

(2)　② より　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot 2^{n-1}=\boldsymbol{n}\times\frac{2^n}{2}$

(3)　②＋③ より　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\,{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot 2^{n-1}+n(n-1)\cdot 2^{n-2}=\boldsymbol{n(n+1)}\times\frac{2^n}{2^2}$

(4)　④＋③×3＋② より　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3\,{}_n\mathrm{C}_k=n(n-1)(n-2)\cdot 2^{n-3}+3n(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}$

$$=\boldsymbol{n^2(n+3)}\times\frac{2^n}{2^3}$$

2

(1)(1−1)　$f(x)=\sqrt{x}$ より　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$2025=5^2\cdot9^2$ であるから　$\dfrac{f(2025)-f(1)}{2025-1}=\dfrac{\sqrt{5^2\cdot9^2}-1}{2024}=\dfrac{44}{2024}=\dfrac{11}{506}=\dfrac{1}{46}$

よって，$\dfrac{f(2025)-f(1)}{2025-1}=f'(c)$ のとき

$$\frac{1}{46}=\frac{1}{2\sqrt{c}}\qquad\therefore\quad c=23^2=\mathbf{529}$$

(1−2)　$\sqrt{2025+1}=45\sqrt{1+\dfrac{1}{2025}}$

$f(x)=\sqrt{1+x}$ とすると，　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$(0,\ 1)$ における接線を考えることにより，$|x|\ll1$ のとき　$f(x)\fallingdotseq1+\dfrac{1}{2}x$

$\left|\dfrac{1}{2025}\right|\ll1$ であるから　$\sqrt{2025+1}=45f\left(\dfrac{1}{2025}\right)\fallingdotseq45\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2025}+1\right)=45+\dfrac{1}{90}$

$=45+0.01111\cdots=45.01111\cdots$

よって，$\sqrt{2025+1}$ の近似値の小数第4位までは　**45.0111**

(2)　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1\iff 2x^2-y^2=4$　……①

両辺を x で微分すると　$4x-2y\dfrac{dy}{dx}=0$　……②

$y\neq0$ であるから　$\dfrac{dy}{dx}=\boldsymbol{\dfrac{2x}{y}}$ $(y\neq0)$

② の両辺を x で微分すると　$4-2\cdot\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dy}{dx}-2y\dfrac{dy^2}{d^2x}=0$

$$y\frac{dy^2}{d^2x}=2-\left(\frac{2x}{y}\right)^2=\frac{-2(2x^2-y^2)}{y^2}=\frac{-8}{y^2}\quad(\because\ ①)$$

よって　$\dfrac{dy^2}{d^2x}=\boldsymbol{\dfrac{-8}{y^3}}$

(3)　$\displaystyle\int_1^{e^2}t^{-t}f'(t)\,dt=a$ とおくと　$f(x)=1+x^x+a$

$y=x^x\ (x>0)$ の自然対数をとると　$\log y=\log x^x=x\log x$

両辺を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$　　$\therefore\quad y'=x^x(\log x+1)$

これを用いると　$f'(x)=x^x(\log x+1)$

よって，　$a=\displaystyle\int_1^{e^2}t^{-t}f'(t)\,dt=\int_1^{e^2}(\log t+1)\,dt=\Big[t\log t\Big]_1^{e^2}=2e^2$

したがって，　$f(x)=\mathbf{1+x^x+2e^2}$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{5}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ より $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，ある実数 x，y を用いて

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$$

とおける．

このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=5x+4y=2+\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2=4x+5y=1+\sqrt{2}\quad\cdots\cdots②$$

①×5−②×4 より　$9x=6-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　$\therefore\ x=\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$

②×5−①×4 より　$9y=-3+3\sqrt{2}$　　$\therefore\ y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$

よって，$\vec{c}=\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\vec{b}$ であるから，

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2&=\left\{\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^2\right\}\cdot5+2\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)\cdot4\\&=\frac{5(15-8\sqrt{2})}{18}+\frac{8(5\sqrt{2}-6)}{18}\\&=\frac{27}{18}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

また，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5-8+5=2,$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2&=|\vec{c}-\vec{b}|=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=\frac{3}{2}-2(1+\sqrt{2})+5\\&=\frac{9-4\sqrt{2}}{2}=\frac{9-2\sqrt{8}}{2}=\frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2\\&=2+\frac{1}{\sqrt{2}}-4-(1+\sqrt{2})+5=\frac{4-\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

したがって，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\frac{\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{(2\sqrt{2}-1)^2}{2}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)}{2}}{2\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

別解　条件を満たすベクトルの成分をみつけてしまえば容易に解ける．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1)$ とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{5}\,,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2+2=4$$

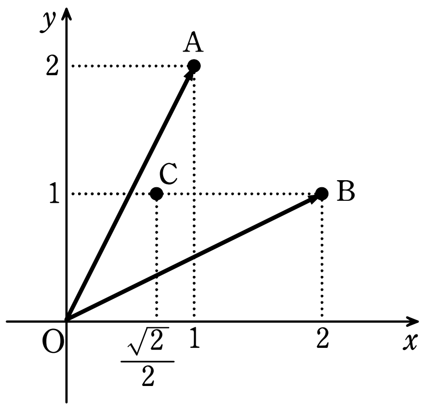
を満たす．

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(x,\ y)$ とすると条件から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 2)\cdot(x,\ y)=x+2y=2+\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2,\ 1)\cdot(x,\ y)=2x+y=1+\sqrt{2}\quad\cdots\cdots②$$

②×2−① より　$3x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　∴　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



② に代入すると　$y=1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1=\dfrac{3}{2}$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2,\ 0\right)$$

より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{2}\,,\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right|=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)+0=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

であるから，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\frac{\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}\cdot\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

補足　$\angle\mathrm{ABC}$ は図形的に求まる．

右上の図より，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と x 軸正方向のなす角は π，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と x 軸正方向のなす角は $\dfrac{3}{4}\pi$ であることから，

$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$ であることがわかる．よって，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3

C_1： $x^2+\dfrac{y^2}{3}=a^2$ ……①，C_2： $\dfrac{x^2}{3}+y^2=a^2$ ……② とおく.

(1) ①×3−② より $\dfrac{8}{3}x^2=2a^2 \iff x^2=\dfrac{3}{4}a^2 \quad \therefore\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

② に代入すると $\dfrac{1}{3}\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+y^2=a^2 \quad \therefore\ y^2=\dfrac{3}{4}a^2$

$a>0$ であるから $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

よって，C_1 と C_2 の交点は 4 つあり，その座標は $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{a},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{a},\ 0\right)$ (複号任意)

(2) 図形 A は図 1 の斜線部分となる.

図 1

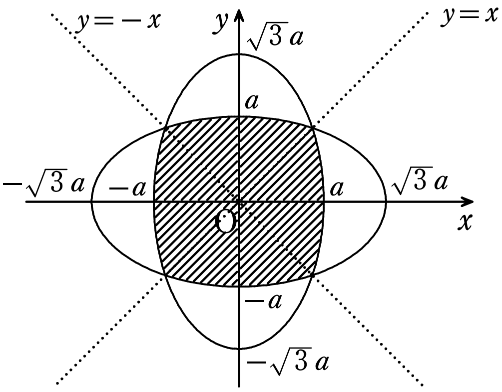
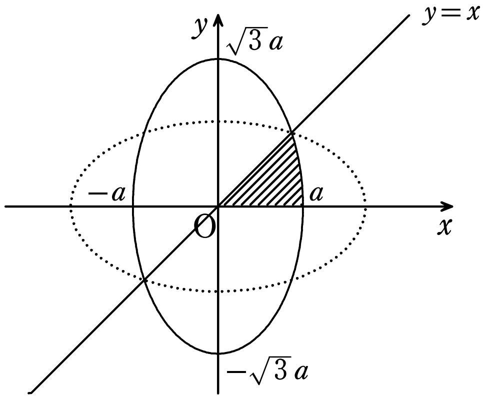


図 2



C_1，C_2 は x 軸，y 軸，$y=\pm x$ に関して対称であるから，$\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{3}\leqq a^2 \\ 0\leqq y\leqq x \end{cases}$ の部分（図 2 ）の面積を S' とすると，

求める面積は $S=8S'$ である.

$x^2+\dfrac{y^2}{3}=a^2$ より，$y\geqq 0$ のとき

$$y^2=3(a^2-x^2) \qquad \therefore\ y=\sqrt{3(a^2-x^2)}$$

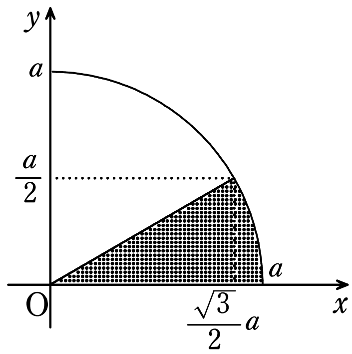
よって，

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{a}\sqrt{3(a^2-x^2)}\,dx$$

$$=\frac{3}{8}a^2+\sqrt{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{3}{8}a^2+\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{a}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi a^2$$



したがって，求める面積は $S=8S'=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi a^2\times 8=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{\pi a^2}$

(3)　△POQ が通過してできる立体の $z=t\ (0\leqq t\leqq a)$ による断面は，図形 A に相似であり，
z 成分の相似比からその面積は

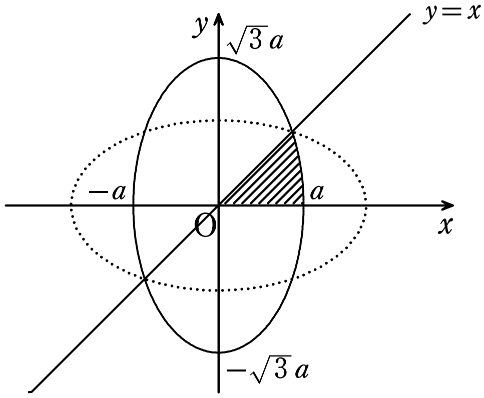
$$S\times\left(\frac{a-t}{a}\right)^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2\left(1-\frac{t}{a}\right)^2$$

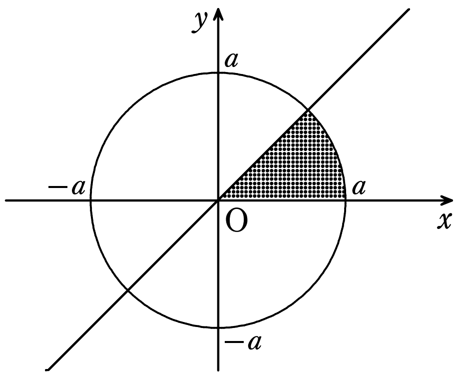
よって，求める体積は

$$V=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2\int_0^a\left(1-\frac{t}{a}\right)^2dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2\left[-\frac{a}{3}\left(1-\frac{t}{a}\right)^3\right]_0^a$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2\cdot\frac{a}{3}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi a^3}$$

別解　S' は次のように求めてもよい．

S' を y 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍すると，C_2 は円：$x^2+y^2=a^2$，直線 $y=x$ は $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ となる．





よって，半径 a，中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形となるから，面積を S'' とすると　$S''=\dfrac{1}{2}\cdot a^2\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{12}a^2$

$S'=\sqrt{3}\,S''$ であるから　$S=\sqrt{3}\times\dfrac{\pi}{12}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi a^2$

以下，本解答同様.

補足(3)　体積 V について
一般に，

$$(\text{錐の体積})=\frac{1}{3}\times(\text{底面積})\times(\text{高さ})$$

であることから，

$$V=\frac{1}{3}\times S\times a=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2\times a=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi a^3$$

と求めることができる．本解答はこのことを積分で示したことになる．

4

(1)　X 君が選べる箱は 4 つあり，そのうち 1 つに賞品が入っているから， X 君が商品を獲得できる確率は　$\dfrac{1}{4}$

(2)　X 君と Y 君の試行は独立なので，X 君，Y 君が選んだ箱に賞品が入っていない確率はいずれも

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(2−1)　Y 君が選んだ箱に賞品が入っていないとき，X 君が最初に選んだ箱に賞品が入っている確率は,

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

(2−2)　Y 君が選んだ箱に賞品が入っていないとき，X 君が最初に選ばなかった箱に賞品が入っている確率は,

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

このとき，X 君とY 君が選ばなかった 2 箱のどちらかに賞品が入っているから，X 君がそれを選ぶ確率は　$\dfrac{1}{2}$

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

(3)(3−1)　X 君が選択をかえずに X 君が賞品を獲得できるのは，はじめに賞品が入った箱を選んでいたときである．

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{4}$

(3−2)　X 君がはじめに賞品が入った箱を選んでいた場合は賞品は獲得できない．そうでない場合は獲得できる．

よって，求める確率は　$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$