解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2026年度　東京大学（文科）

【　講　評　】

例年通り，大問4題での出題であった．昨年，一昨年同様，頻出である通過領域や整数問題の出題はなく，全体的に手の付けやすい問題が並んだ．比較的易しめな大問2と標準的な難易度である大問1，大問3のどちらか一方を完答し，残りは部分点を稼ぎたい．

1．積分法（面積）【標準】

面積のとり得る値の範囲を求める問題であった．面積は6分の1公式によって容易に求めることができ，面積の取りうる値の範囲に関しては，定石通り共有点の x 座標に関する対称式計算を行うだけである．完答したい問題である．

2．場合の数・確率【やや易】

座標平面上の3点を頂点とする三角形の個数を数える問題であった．典型的な問題であり，文字による場合分け等も生じないため，解答しやすかっただろう．ここは確実に完答したい．

3．２次関数【標準】

(1) は不等式証明であるが，各関数のグラフがイメージできてれば，どの様に証明するかの方針が立てやすいだろう．(2) は2曲線の共有点の個数を調べる問題である． a の値によって共有点の個数が変化する部分をしっかりと論証することができるかがポイントで，出来不出来の分かれそうな問題である．

4．微分法（数Ⅱ）／図形と方程式【やや難】

(1) は接線の傾きが存在する条件を考えるだけである．(2) は面積 S が最大値，最小値をとるときを正確に把握できたかがポイントとなる．出来不出来の分かれそうな問題である．

【　解　説　】

第１問

正の実数 k および $\alpha<\beta$ となる実数 α，β が次の条件を満たすように動く．

条件：　座標平面上の放物線 C： $y=k(x-\alpha)(\beta-x)$ の頂点は $(-3,\ 1)$ であり，

C は y 軸と $-2\leqq y\leqq 0$ の範囲で交わる．

このとき，C と x 軸で囲まれる図形の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ．

解説

放物線 C の軸の方程式は $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であるから，　$y=k\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(\beta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\dfrac{k}{4}(\beta-\alpha)^2$

C の頂点が $(-3,\ 1)$ であることから

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-3\\ \dfrac{k}{4}(\beta-\alpha)^2=1\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha+\beta=-6 & \cdots\cdots①\\ (\beta-\alpha)^2=\dfrac{4}{k} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

② を変形すると，　$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{4}{k}$

① を代入すると，　$(-6)^2-4\alpha\beta=\dfrac{4}{k}$　　　$\therefore$　$\alpha\beta=9-\dfrac{1}{k}$　$\cdots\cdots③$

①，③ より，α，β は t の２次方程式

$$t^2-(-6)t+9-\frac{1}{k}=0\qquad\therefore\quad t^2+6t+9-\frac{1}{k}=0\quad\cdots\cdots④$$

の２解である．

④ の判別式を D とすると，$k>0$ より　$\dfrac{D}{4}=9-\left(9-\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{1}{k}>0$

よって，実数 α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ は存在する．

また，C において $x=0$ とすると　$y=k(-\alpha)(\beta)=-k\alpha\beta$

条件より　$-2\leqq -k\alpha\beta\leqq 0$

これに ③ を代入すると　$-2\leqq -k\left(9-\dfrac{1}{k}\right)\leqq 0$　　　$\therefore$　$\dfrac{1}{9}\leqq k\leqq\dfrac{1}{3}$　$\cdots\cdots⑤$

ここで，$k>0$ より $\alpha\leqq x\leqq\beta$ において，

$$y=k(x-\alpha)(\beta-x)=-k(x-\alpha)(x-\beta)\geqq 0$$

であるから，C と x 軸で囲まれる図形の面積 S は

$$S=-k\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{k}{6}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{k}{6}\left(\frac{4}{k}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{k}}$$

⑤ より $\dfrac{1}{3}\leqq\sqrt{k}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq\frac{4}{3\sqrt{k}}\leqq 4\qquad\therefore\quad \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq S\leqq 4}$$

第２問

n を正の整数とする．座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合

$$\{(x,\ y)\mid x,\ y \text{は} 1\leqq x\leqq 3,\ 1\leqq y\leqq n \text{を満たす整数}\}$$

から相異なる３点を選ぶ．ただし，どの３点も等確率で選ばれるものとする．選んだ３点が三角形の３頂点となる確率を p_n とする．

(1)　p_5 を求めよ．

(2)　m を２以上の整数とする．p_{2m} を求めよ．

(解説)

(1)　$n=5$ のとき，15 個の点から異なる３点の選び方の総数は　${}_{15}\mathrm{C}_3=\dfrac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2}=5\cdot 7\cdot 13$ 通り

このうち，選んだ３点が三角形の頂点とならない，すなわち同一直線上にあるのは，次の場合である．

(ア)　$x=k\ (k=1,\ 2,\ 3)$ 上の３点を選ぶとき

$x=k$ 上の点は５つあるから，　${}_5\mathrm{C}_3\times 3=10\times 3=30$ 通り

(イ)　３点 $(1,\ y_1)$，$(2,\ y_2)$，$(3,\ y_3)$ を選ぶとき

３点が同一直線上にあるための条件は　$\dfrac{y_1+y_3}{2}=y_2$　　$\therefore$　$y_1+y_3=2y_2$

よって，y_1+y_3 は偶数，すなわち y_1 と y_3 の偶奇が一致することである．

$1\leqq y_1\leqq 5$，$1\leqq y_3\leqq 5$ であり，１から５までは偶数が２個，奇数が３個存在するから，

$2\times 2+3\times 3=4+9=13$ 通り

よって，求める確率は　$p_5=1-\dfrac{30+13}{5\cdot 7\cdot 13}=1-\dfrac{43}{455}=\boldsymbol{\dfrac{412}{455}}$

(2)　$n=2m$ のとき，$3\times 2m=6m$ 個の点から異なる３点の選び方は

$${}_{6m}\mathrm{C}_3=\frac{6m(6m-1)(6m-2)}{3\cdot 2}=2m(6m-1)(3m-1) \text{ 通り}$$

このうち，選んだ３点が三角形の頂点とならない，すなわち同一直線上にあるのは，次の場合である．

(ア)　$x=k\ (k=1,\ 2,\ 3)$ 上の３点を選ぶとき

$x=k$ 上の点は $2m$ 個あるから，　${}_{2m}\mathrm{C}_3\times 3=\dfrac{2m(2m-1)(2m-2)}{3\cdot 2}\times 3=2m(2m-1)(m-1)$

(イ)　３点 $(1,\ y_1)$，$(2,\ y_2)$，$(3,\ y_3)$ を選ぶとき

３点が同一直線上にあるための条件は　$\dfrac{y_1+y_3}{2}=y_2$　　$\therefore$　$y_1+y_3=2y_2$

よって，y_1+y_3 は偶数，すなわち y_1 と y_3 の偶奇が一致することである．

$1\leqq y_1\leqq 2m$，$1\leqq y_3\leqq 2m$ であり，１から $2m$ までは偶数と奇数が m 個ずつ存在するから，

$m^2+m^2=2m^2$ 通り

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}p_{2m}&=1-\frac{2m(2m-1)(m-1)+2m^2}{2m(6m-1)(3m-1)}=1-\frac{2m^2-2m+1}{(6m-1)(3m-1)}\\&=\frac{18m^2-9m+1-(2m^2-2m+1)}{(6m-1)(3m-1)}=\frac{16m^2-7m}{(6m-1)(3m-1)}\\&=\boldsymbol{\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}}\end{aligned}$$

第３問

$0<a<1$ とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3$$

と定める．

また，関数 $g(x)$ を次のように定める．整数 n に対し，

$2n\leqq x<2n+1$ のとき　　$g(x)=x-2n$

$2n+1\leqq x<2n+2$ のとき　　$g(x)=-x+2n+2$

とする．

(1)　$x\geqq 4$ において $f(x)>g(x)$ を示せ．

(2)　$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ とする．座標平面上の $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの $x\geqq 0$ の範囲における共有点の個数を求めよ．

（解説）

(1)　$2n\leqq x<2n+1$ のとき　$0\leqq g(x)<1$，$2n+1\leqq x<2n+2$ のとき　$0<g(x)\leqq 1$

よって，すべての実数 x について　$0\leqq g(x)\leqq 1$

$x\geqq 4$ のとき $\dfrac{a}{8}(x-1)^2>0$，$\dfrac{2}{a}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式により

$$f(x)=\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3\geqq 2\sqrt{\frac{a}{8}(x-1)^2\cdot\frac{2}{a}}-3=x-4$$

等号が成り立つのは　$\dfrac{a}{8}(x-1)^2=\dfrac{2}{a}\iff(x-1)^2=\dfrac{16}{a^2}\iff x=1\pm\dfrac{4}{a}$

$4\leqq x\leqq 5$ のとき，$g(x)=x-4$ であり，$0<a<1$ より

$$1-\frac{4}{a}<-3,\ 5<1+\frac{4}{a}$$

であるから，

$$f(x)>x-4=g(x)$$

$x>5$ のとき，

$$f(x)\geqq x-4>1,\ 0\leqq g(x)\leqq 1$$

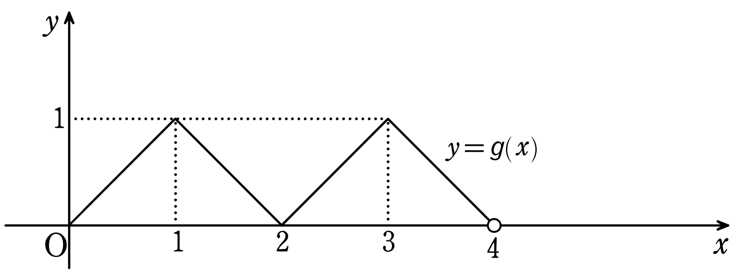
であるから，

$$f(x)>g(x)$$

したがって，$x\geqq 4$ において $f(x)>g(x)$ が成り立つ．（証明終了）

(2)　(1) より，$x\geqq 4$ において $f(x)>g(x)$ であるから，$0\leqq x<4$ について考える．

この範囲における $y=g(x)$ のグラフは次の図のようになる．



放物線 $y=f(x)$ の軸の方程式は $x=1$ であるから，　$f(1)=\dfrac{2}{a}-3$

$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ であるから，$y=f(x)$ の頂点の y 座標は，　$0<\dfrac{2}{a}-3<1$

放物線 $y=f(x)$ は $x=1$ に関して対称であるから，$y=g(x)$ と $0<x<1$，$1<x<2$ において 1 つずつ共有点をもつ．

また，$f'(x)=\dfrac{a}{4}(x-1)$ であるから，$2\leqq x<4$において

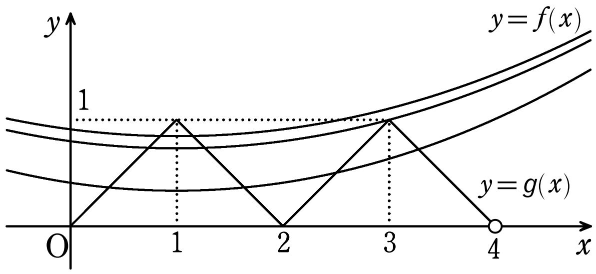
$$\frac{a}{4}\leqq\frac{a}{4}(x-1)<\frac{3}{4}a<\frac{3}{4}\qquad\therefore\quad 0<f'(x)<1$$

よって，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が接することはなく，

$2\leqq x\leqq 3$，$3\leqq x\leqq 4$ でのそれらの交点は高々 1 つである．

$y=f(x)$ が $(3,\ 1)$ を通るとき

$$1=f(3)=\frac{a}{2}+\frac{2}{a}-3\quad\Leftrightarrow\quad a^2-8a+4=0$$



これを $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$ で解くと　$a=4-2\sqrt{3}$

よって，$\dfrac{1}{2}<a<4-2\sqrt{3}$ のとき　$f(3)>1=g(3)$，

$4-2\sqrt{3}<a<\dfrac{2}{3}$ のとき　$f(3)<1=g(3)$

以上により，$x\geqq 0$ における $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の個数は

$\dfrac{1}{2}<a<4-2\sqrt{3}$ のとき 2 個，

$a=4-2\sqrt{3}$ のとき 3 個，

$4-2\sqrt{3}<a<\dfrac{2}{3}$ のとき 4 個

である．

別解　$2\leqq x<3$ において $y=f(x)$ が $y=g(x)$ と接しないことは，判別式で示すこともできる．

$2\leqq x<3$ のとき，$g(x)=x-2$ であるから，$y=f(x)$ と連立させて

$$\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3=x-2$$

$$\frac{a}{8}x^2-\left(\frac{a}{4}+1\right)x+\frac{a}{8}+\frac{2}{a}-1=0$$

判別式を D とすると，

$$D=\left(\frac{a}{4}+1\right)^2-4\cdot\frac{a}{8}\cdot\left(\frac{a}{8}+\frac{2}{a}\right)=\frac{a}{2}>0\quad\left(\because\ \frac{1}{2}<a<\frac{2}{3}\right)$$

よって，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $2\leqq x<3$ において接することはない．

第４問

k を実数とし，座標平面上の曲線 C を $y=x^3-kx$ で定める．C 上の２点 P，Q に対する以下の条件（$*$）を考える．

条件（$*$）　原点 O，点 P，Q は相異なり，C の O，P，Q における接線のうち，

どの２本も交わり，そのなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる．

(1)　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ とする．$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ を $\tan\theta$ を用いて表せ．

(2)　条件（$*$）を満たす P，Q が存在するような k の範囲を求めよ．

(3)　k が(1)で定まる範囲にあるとする．P，Q が条件（$*$）を満たすように動くとき，C の O，P，Q における接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M，最小値を m とおく．ただし，３本の接線が１点で交わるときは $S=0$ とする．$M=4m$ となる k の値を求めよ．

（解説）

(1)　加法定理により，　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\tan\theta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\theta}$

(2)　$f(x)=x^3-kx$ とおくと　$f'(x)=3x^2-k$

原点 O における接線の傾きを

$$f'(0)=-k=\tan\alpha$$

とおくと，これとなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ である直線の傾きは次の２つのみであり，このとき，3 直線のなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる．

$$\tan\left(\alpha\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\frac{\pi}{3}}{1\mp\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{-k\pm\sqrt{3}}{1\pm\sqrt{3}k}$$

$\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ ($p\neq q$，$p\neq 0$，$q\neq 0$ なる実数) とおくと，

$$f'(p)=3p^2-k=\frac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k} \iff 3p^2=\frac{\sqrt{3}(1+k^2)}{1+\sqrt{3}k} \quad \cdots\cdots①$$

$$f'(q)=3q^2-k=\frac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k} \iff 3q^2=\frac{-\sqrt{3}(1+k^2)}{1-\sqrt{3}k} \quad \cdots\cdots②$$

であるから，これらを満たす p，q が存在する条件を考えればよい．

$1+k^2>0$ であるから，① を満たす p が存在する条件は　$1+\sqrt{3}k>0$　　$\therefore$　$k>-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\cdots\cdots③$

同様に，② を満たす q が存在する条件は　$1-\sqrt{3}k<0$　　$\therefore$　$k>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\cdots\cdots④$

③ かつ ④ より，求める k の値の範囲は　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<k$

(3) (1) より $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<k$ のとき，$\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とすると次のようにできる．

$$3p^2=\frac{\sqrt{3}(1+k^2)}{1+\sqrt{3}k}\quad\cdots\cdots①,\quad 3q^2=\frac{-\sqrt{3}(1+k^2)}{1-\sqrt{3}k}\quad\cdots\cdots②$$

$y=f(x)$ の $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)\qquad\therefore\quad y=(3t^2-k)x-2t^3$$

よって，点 O，P，Q における接線の方程式はそれぞれ

$$y=-kx\quad\cdots\cdots⑤,\quad y=(3p^2-k)x-2p^3\quad\cdots\cdots⑥,\quad y=(3q^2-k)x-2q^3\quad\cdots\cdots⑦$$

⑤，⑥を連立させて　$-kx=(3p^2-k)x-2p^3\qquad\therefore\quad x=\dfrac{2}{3}p$

⑤，⑦を連立させて　$-kx=(3q^2-k)x-2q^3\qquad\therefore\quad x=\dfrac{2}{3}q$

⑤，⑥，⑦のなす角がいずれも $\dfrac{\pi}{3}$ であることから，これら 3 直線によって囲まれる三角形は正三角形であり，

その一辺の長さは　$\sqrt{1+(-k)^2}\left|\dfrac{2}{3}p-\dfrac{2}{3}q\right|=\dfrac{2}{3}\sqrt{1+k^2}|p-q|$

よって，面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{1+k^2}|p-q|\right\}^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p-q)^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p^2+q^2-2pq)$$

ここで①，②より

$$3p^2+3q^2=\frac{\sqrt{3}(1+k^2)\{(1-\sqrt{3}k)-(1+\sqrt{3}k)\}}{1-3k^2}=\frac{6k(1+k^2)}{3k^2-1}$$

$$\therefore\quad p^2+q^2=\frac{2k(1+k^2)}{3k^2-1}\quad\cdots\cdots⑧$$

また，

$$3p^2\cdot 3q^2=\frac{-3(1+k^2)}{1-3k^2}=\frac{3(1+k^2)^2}{3k^2-1}$$

$$p^2q^2=\frac{(1+k^2)^2}{3(3k^2-1)}\qquad\therefore\quad pq=\pm\frac{1+k^2}{\sqrt{3(3k^2-1)}}\quad\cdots\cdots⑨$$

よって，

$$M=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p^2+q^2+2|pq|),\quad m=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p^2+q^2-2|pq|)$$

であるから，$M=4m$ のとき

$$p^2+q^2+2|pq|=4(p^2+q^2-2|pq|)$$
$$3(p^2+q^2)=10|pq|$$

⑧，⑨より

$$\frac{6k(1+k^2)}{3k^2-1}=\frac{10(1+k^2)}{\sqrt{3(3k^2-1)}}$$

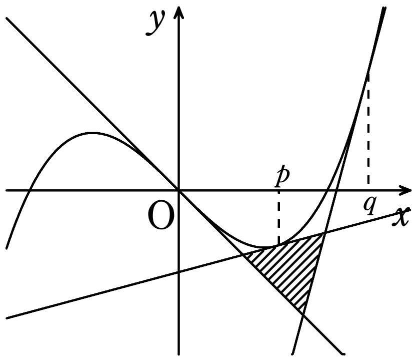
$$9k^2=25(3k^2-1)\qquad\therefore\quad k^2=\frac{25}{48}$$

$k>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから　$k=\sqrt{\dfrac{25}{48}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$

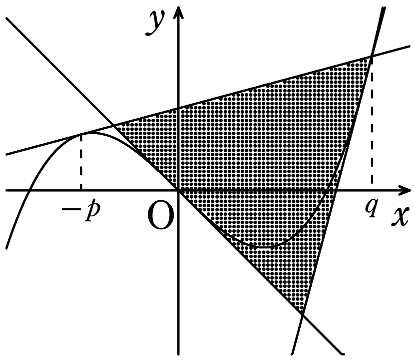
参考　S の最大値 M，最小値 m について．

S が最小値 m をとるのは $pq>0$，すなわち p，q が同符号となるとき（図１）であり，S が最大値をとるのは $pq<0$ であるとき，すなわち p，q が異符号となるとき（図２）であり，

（図１）$0<p<q$



（図２）$p<0<q$



$f'(p)=f'(-p)=3p^2-k$ であるから，最小値 m をとるときの三角形と最大値 M をとるときの三角形は相似であり，$M=4m$ となるとき，相似比から

$$p-q : p-(-q)=1:2$$

$$2(p-q)=p+q \qquad \therefore \quad p=3q$$

これを用いて k の値を求めることもできる．