2026年度　東京大学（理科）

【　講　評　】

例年通り，大問６題での出題であった．出題分野は微分法・積分法，場合の数・確率，複素数平面，整数の性質と頻出なものが中心であった．比較的難易度の低い第２問は完答し，第１問，第３問，第４問の中から２問を完答し，残りは部分点を稼げるとよいだろう．

１．数学Ⅲ微分法・積分法【標準】

(1) は微分法を用いた典型的な不等式証明で，ここは落とせない．(2) は定積分を評価する頻出問題であるが，(1) の不等式の利用方法に気づけたかどうかが鍵である．他の問題の難易度を考えると，完答したい問題である．

２．場合の数・確率【やや易】

座標平面上の３点を頂点とする三角形の個数を数える問題であった．典型的な問題であり，文字による場合分け等も生じないため，解答しやすかっただろう．ここは確実に完答したい．

３．図形と方程式（軌跡，通過領域）【標準】

(1) は典型的な軌跡の問題で，空間座標の問題ではあるが，実質平面座標の問題であるため解きやすかったであろう．(2) は (1) の軌跡をヒントに直線の方程式を立式し，通過領域を求めるだけである．

４．微分法（数Ⅱ）／図形と方程式【標準】

(1) は接線の傾きが存在する条件を考えるだけである．(2) は面積 S が最大値，最小値をとるときを正確に把握できたかがポイントとなる．出来不出来の分かれそうな問題である．

５．複素数平面【やや難】

(1) は偏角の範囲を考えるだけであるから落とせない．(2) は条件を満たす α の存在範囲を図形的に捉えようとしたか，もしくは数式で捉えようとしたかで出来不出来が分かれそうである．

６．整数の性質（数学と人間の活動）【難】

(1) は計算問題なので落とせない．(2) は (1) の一般化で，どのように証明するかの糸口がつかめるかどうかが鍵である．ここは部分点狙いに徹して，他の問題で得点するのが効率的だろう．

【　解　説　】

第１問

(1)　関数 $f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$ の区間 $-1\leqq\theta\leqq 1$ における最大値 M および最小値 m を求めよ.

(2)　(1) で定めた M に対し，次の不等式を示せ.

$$\frac{7}{8}\pi\leqq\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)\,dx\leqq\frac{7}{8}\pi+4M$$

(解説)

(1)　$f(-\theta)=\sin(-\theta)-(-\theta)+\dfrac{(-\theta)^3}{6}=-\sin\theta+\theta-\dfrac{\theta^3}{6}=-f(\theta)$

よって， $f(\theta)$ は奇関数であるから，$0\leqq\theta\leqq 1$ について考える.

$$f'(\theta)=\cos\theta-1+\frac{\theta^2}{2},$$

$$f''(\theta)=-\sin\theta+\theta,$$

$$f'''(\theta)=1-\cos\theta\geqq 0$$

$0\leqq\theta\leqq 1$ において $f''(\theta)$ は単調増加であり，　$f''(\theta)\geqq f''(0)=0$

よって， $0\leqq\theta\leqq 1$ において $f'(\theta)$ も単調増加であり，　$f'(\theta)\geqq f'(0)=0$

したがって， $0\leqq\theta\leqq 1$ において $f(\theta)$ も単調増加であるから，

$$M=f(1)=\sin 1-1+\frac{1}{6}=\sin 1-\frac{5}{6}$$

$f(\theta)$ は奇関数であるから，

$$m=f(-1)=\sin(-1)-(-1)+\frac{(-1)^3}{6}=\frac{5}{6}-\sin 1\ (=-M)$$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)\,dx$ とおく.

加法定理により　$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\{\sin(\cos x)\cos x-\cos(\cos x)\sin x\}\,dx$

このとき，　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(\cos x)\sin x\,dx=\Big[-\sin(\cos x)\Big]_0^{2\pi}=-\sin 1+\sin 1=0$

よって，　$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから，(1) の $f(\theta)$ より

$$f(\cos x)=\sin(\cos x)-\cos x+\frac{1}{6}\cos^3 x$$

$$\sin(\cos x)=f(\cos x)+\cos x+\frac{1}{6}\cos^3 x$$

$$\therefore\quad \sin(\cos x)\cos x=f(\cos x)\cos x+\cos^2 x+\frac{1}{6}\cos^4 x$$

ここで，

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}=\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^4 x\,dx=\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right\}^2 dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left\{1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{3}{4}\pi$$

であるから，

$$I=\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx=\int_0^{2\pi}f(\cos x)\cos x\,dx+\pi-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\pi$$
$$=\int_0^{2\pi}f(\cos x)\cos x\,dx+\frac{7}{8}\pi\quad\cdots\cdots①$$

(1) より $f(\cos x)\leqq M$ であるから，

$$I=\int_0^{2\pi}f(\cos x)\cos x\,dx\leqq\int_0^{2\pi}|f(\cos x)\cos x|\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}M|\cos x|\,dx=4M\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=4M\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4M\quad\cdots\cdots②$$

また，(1) より

$-1\leqq\cos x\leqq 0$ のとき　$f(\cos x)\leqq 0$，　$0\leqq\cos x\leqq 1$ のとき　$f(\cos x)\geqq 0$

であるから，任意の x に対して

$$f(\cos x)\cos x\geqq 0$$
$$\therefore\quad\int_0^{2\pi}f(\cos x)\cos x\,dx\geqq 0\quad\cdots\cdots③$$

①，②，③ より，

$$\frac{7}{8}\pi\leqq I\leqq\frac{7}{8}\pi+4M\qquad\therefore\quad\frac{7}{8}\pi\leqq\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)\,dx\leqq\frac{7}{8}\pi+4M$$

補足

$y=\cos^2 x$ や $y=\cos^4 x$ のグラフが $x=\frac{\pi}{2}$ に関して対称であることに注意すると，

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ について

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^0 x\,dx=\frac{\pi}{2},\ I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\ (n\geqq 2)$$

が成り立つことから，

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=4I_2=4\cdot\frac{1}{2}I_0=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^4 x\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx=4I_4=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi$$

と計算することができる．

第２問

n を正の整数とする．座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合

$$\{(x,\ y)\mid x,\ y \text{ は } 1\leqq x\leqq 3,\ 1\leqq y\leqq n \text{ を満たす整数}\}$$

から相異なる３点を選ぶ．ただし，どの３点も等確率で選ばれるものとする．選んだ３点が三角形の３頂点となる確率を p_n とする．

(1)　p_5 を求めよ．

(2)　m を２以上の整数とする．p_{2m} を求めよ．

解説

(1)　$n=5$ のとき，15 個の点から異なる３点の選び方の総数は　${}_{15}\mathrm{C}_3=\dfrac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2}=5\cdot7\cdot13$ 通り

このうち，選んだ３点が三角形の頂点とならない，すなわち同一直線上にあるのは，次の場合である．

(ア)　$x=k\ (k=1,\ 2,\ 3)$ 上の３点を選ぶとき

$x=k$ 上の点は５つあるから，　${}_5\mathrm{C}_3\times3=10\times3=30$ 通り

(イ)　３点 $(1,\ y_1)$，$(2,\ y_2)$，$(3,\ y_3)$ を選ぶとき

３点が同一直線上にあるための条件は　$\dfrac{y_1+y_3}{2}=y_2$　　$\therefore$　$y_1+y_3=2y_2$

よって，y_1+y_3 は偶数，すなわち y_1 と y_3 の偶奇が一致することである．

$1\leqq y_1\leqq5$，$1\leqq y_3\leqq5$ であり，１から５までは偶数が２個，奇数が３個存在するから，

$2\times2+3\times3=4+9=13$ 通り

よって，求める確率は　$p_5=1-\dfrac{30+13}{5\cdot7\cdot13}=1-\dfrac{43}{455}=\boldsymbol{\dfrac{412}{455}}$

(2)　$n=2m$ のとき，$3\times2m=6m$ 個の点から異なる３点の選び方は

$${}_{6m}\mathrm{C}_3=\frac{6m(6m-1)(6m-2)}{3\cdot2}=2m(6m-1)(3m-1) \text{ 通り}$$

このうち，選んだ３点が三角形の頂点とならない，すなわち同一直線上にあるのは，次の場合である．

(ア)　$x=k\ (k=1,\ 2,\ 3)$ 上の３点を選ぶとき

$x=k$ 上の点は $2m$ 個あるから，　${}_{2m}\mathrm{C}_3\times3=\dfrac{2m(2m-1)(2m-2)}{3\cdot2}\times3=2m(2m-1)(m-1)$

(イ)　３点 $(1,\ y_1)$，$(2,\ y_2)$，$(3,\ y_3)$ を選ぶとき

３点が同一直線上にあるための条件は　$\dfrac{y_1+y_3}{2}=y_2$　　$\therefore$　$y_1+y_3=2y_2$

よって，y_1+y_3 は偶数，すなわち y_1 と y_3 の偶奇が一致することである．

$1\leqq y_1\leqq2m$，$1\leqq y_3\leqq2m$ であり，１から $2m$ までは偶数と奇数が m 個ずつ存在するから，

$m^2+m^2=2m^2$ 通り

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}p_{2m}&=1-\frac{2m(2m-1)(m-1)+2m^2}{2m(6m-1)(3m-1)}=1-\frac{2m^2-2m+1}{(6m-1)(3m-1)}\\&=\frac{18m^2-9m+1-(2m^2-2m+1)}{(6m-1)(3m-1)}=\frac{16m^2-7m}{(6m-1)(3m-1)}\\&=\boldsymbol{\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}}\end{aligned}$$

第３問

座標空間内の原点を中心とする半径５の球面を S とする． S 上の相異なる３点 P，Q，R が次の条件を満たすように動く．

条件：P，Q は xy 平面上にあり，三角形 PQR の重心は G(2，0，1) である．

以下の問いに答えよ．

(1)　線分 PQ の中点 M の軌跡を xy 平面上に図示せよ．

(2)　線分 PQ が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ．

解説

(1)　P，Q は xy 平面上の異なる２点であるから，

$$\mathrm{P}(5\cos p,\ 5\sin p,\ 0),\ \mathrm{Q}(5\cos q,\ 5\sin q,\ 0)\quad (0 \leqq p < 2\pi,\ 0 \leqq q < 2\pi,\ p \fallingdotseq q)$$

とおける．

また，R$(a,\ b,\ c)$ とおくと，R は原点を中心とする半径５の球面上の点であるから

$$a^2+b^2+c^2=25 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

△PQR の重心が G(2，0，1) であることから

$$\begin{cases} \dfrac{5\cos p+5\cos q+a}{3}=2 \\ \dfrac{5\sin p+5\sin q+b}{3}=0 \\ \dfrac{0+0+c}{3}=1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} 5\cos p+5\cos q=6-a \\ 5\sin p+5\sin q=-b \\ c=3 \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

よって，P，Q の一致を許した条件は，ある ① を満たす R があり，② を満たすと言える．

M$(x,\ y,\ 0)$ とすると，M は線分 PQ の中点で

$$\begin{cases} x=\dfrac{5\cos p+5\cos q}{2} \\ y=\dfrac{5\sin p+5\sin q}{2} \end{cases}$$

となるから，条件は，ある a，b があって

$$\begin{cases} x=\dfrac{6-a}{2} \\ y=\dfrac{-b}{2} \\ a^2+b^2+3^2=25 \end{cases} \iff \begin{cases} a=6-2a \\ b=-2y \\ a^2+b^2=16 \end{cases}$$

よって，　$(6-2x)^2+(-2y^2)=16$

$$4(x-3)^2+4y^2=16 \qquad \therefore\ (x-3)^2+y^2=4$$

P，Q の一致を許していたので，一致している場合をここから取り除く．

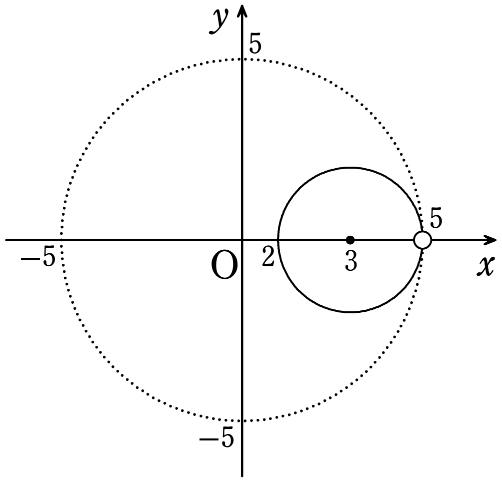
２点 P，Q が一致するとき，これらは $x^2+y^2=25$， $z=0$ 上を動き，このとき △PQR は存在しない．

また，P，Q が一致せずに M がこの円周上にあることはない．

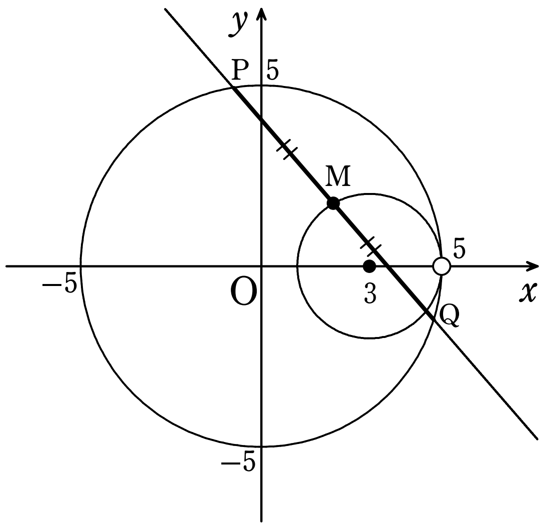
したがって，求める点 M の軌跡は

$$(x-3)^2+y^2=4,\ \ z=0,\ (x,\ y) \fallingdotseq (5,\ 0)$$

であり，これを図示すると次の図の実線部分となる．



(2)　(1) の結果より，線分 PQ は中点が点 M となる円 $(x-3)^2+y^2=4$ の弦である．



$\mathrm{M}(X,\ Y)$ とすると，直線 PQ 上の任意の点を $\mathrm{S}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MS}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MS}}=(X,\ Y)\cdot(x-X,\ y-Y)=0$$

$$X(x-X)+Y(y-Y)=0$$

$$Xx+Yy-(X^2+Y^2)=0$$

(1) より，$\mathrm{M}(X,\ Y)$ について

$$(X-3)^2+Y^2=4 \iff X^2+Y^2=6X-5 \qquad 2(x-6)+\sqrt{3}\,y+5$$

が成り立つから，直線 PQ の方程式は M の座標に対してただ 1 つ定まり，

$$Xx+Yy-(6X-5)=0 \qquad \therefore\ (x-6)X+yY+5=0$$

したがって，X，Y の連立方程式

$$\begin{cases}(x-6)X+yY+5=0 & \cdots\cdots④\\ (X-3)^2+Y^2=4 & \cdots\cdots⑤\end{cases}$$

が $(X,\ Y)\fallingdotseq(5,\ 0)$ なる実数解をもつときの $(x,\ y)$ の存在範囲が，直線 PQ の通過領域である．

XY 平面において，④ は直線，⑤ は円とみなせるから，これらが共有点をもつ条件から

$$\frac{|3(x-6)+5|}{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}\leqq 2$$

$$(3x-13)^2\leqq 4\{(x-6)^2+y^2\}$$

$$5x^2-30x-4y^2\cdot 25$$

$$5(x-3)^2-4y^2\leqq -25+40 \qquad \therefore\ \frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5}\leqq 1 \quad\cdots\cdots⑥$$

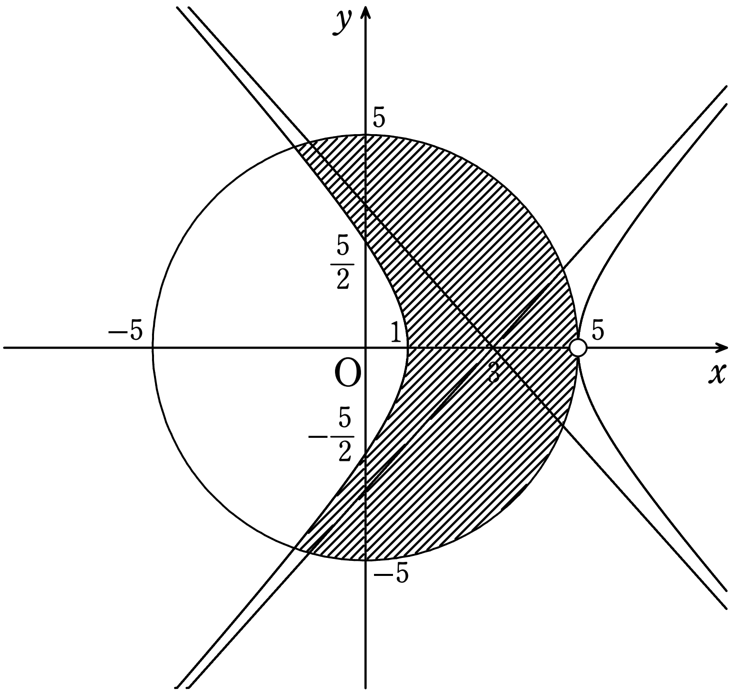
また，$(X,\ Y)=(5,\ 0)$ のとき ④ より　$5(x-6)+5=0$　　$\therefore\ \ x=5$

これを ⑥ の境界線に代入すると　$1-\dfrac{y^2}{5}=1$　　$\therefore\ \ y=0$

よって，直線 PQ の通過領域は

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5}\leqq 1,\ \ z=0,\ \ (x,\ y,\ z)\neq(5,\ 0,\ 0)$$

線分 PQ は直線 PQ の $x^2+y^2\leqq 5$ への制限ゆえ，このうち $x^2+y^2\leqq 5$，$z=0$ の部分が線分 PQ の通過する範囲である．これを図示すると次の図の斜線部分となる．ただし，境界線は $(x,\ y)=(5,\ 0)$ 以外を含む．



別解　⑥ 式は次のように導いてもよい．

$X,\ Y$ の連立方程式

$$\begin{cases}(x-6)X+yY+5=0 & \cdots\cdots④\\ (X-3)^2+Y^2=4 & \cdots\cdots⑤\end{cases}$$

が $(X,\ Y)\neq(5,\ 0)$ なる実数解をもつときの $(x,\ y)$ の存在範囲が，直線 PQ の通過領域である．

⑤ より

$$X=2\cos\theta+3,\ Y=2\sin\theta,\ 0<\theta<2\pi$$

とおけるから，これを ④ に代入すると

$$(x-6)(2\cos\theta+3)+y(2\sin\theta)+5=0$$

$$2(x-6)\cos\theta+2y\sin\theta+3x-13=0$$

$(x,\ y)=(6,\ 0)$ のとき成り立たないから，$(x,\ y)\neq(6,\ 0)$ であり，このとき

$$2\sqrt{(x-6)^2+y^2}\sin(\theta+\alpha)=13-3x$$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{2(x-6)}{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{2y}{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}$ とする．

よって，$0<\theta<2\pi$ のとき $|\sin(\theta+\alpha)|\leqq 1$ であるから，

$$|13-3x|\leqq 2\sqrt{(x-6)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$(13-3x)^2\leqq 4\{(x-6)^2+y^2\}\iff\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5}\leqq 1\quad\cdots\cdots⑥$$

第４問

k を実数とし，座標平面上の曲線 C を $y=x^3-kx$ で定める．C 上の２点 P，Q に対する以下の条件（$*$）を考える．

条件（$*$）　原点 O，点 P，Q は相異なり，C の O，P，Q における接線のうち，

どの２本も交わり，そのなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる．

(1)　条件（$*$）を満たす P，Q が存在するような k の範囲を求めよ．

(2)　k が(1)で定まる範囲にあるとする．P，Q が条件（$*$）を満たすように動くとき，C の O，P，Q における接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M，最小値を m とおく．ただし，３本の接線が１点で交わるときは $S=0$ とする．$M=4m$ となる k の値を求めよ．

解説

(1)　$f(x)=x^3-kx$ とおくと　$f'(x)=3x^2-k$

原点 O における接線の傾きを

$$f'(0)=-k=\tan\alpha$$

とおくと，これとなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ である直線の傾きは次の２つのみであり，このとき，3 直線のなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる．

$$\tan\left(\alpha\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\frac{\pi}{3}}{1\mp\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{-k\pm\sqrt{3}}{1\pm\sqrt{3}\,k}$$

$P(p,\ f(p))$，$Q(q,\ f(q))$（$p\neq q$，$p\neq 0$，$q\neq 0$ なる実数）とおくと，

$$f'(p)=3p^2-k=\frac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,k}\iff 3p^2=\frac{\sqrt{3}(1+k^2)}{1+\sqrt{3}\,k}\quad\cdots\cdots①$$

$$f'(q)=3q^2-k=\frac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,k}\iff 3q^2=\frac{-\sqrt{3}(1+k^2)}{1-\sqrt{3}\,k}\quad\cdots\cdots②$$

であるから，これらを満たす p，q が存在する条件を考えればよい．

$1+k^2>0$ であるから，① を満たす p が存在する条件は　$1+\sqrt{3}\,k>0$　$\therefore$　$k>-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\cdots\cdots③$

同様に，② を満たす q が存在する条件は　$1-\sqrt{3}\,k<0$　$\therefore$　$k>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\cdots\cdots④$

③ かつ ④ より，求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}<k}$

(2)　(1) より $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<k$ のとき，$P(p,\ f(p))$，$Q(q,\ f(q))$ とすると

$$3p^2=\frac{\sqrt{3}(1+k^2)}{1+\sqrt{3}\,k}\quad\cdots\cdots①,\quad 3q^2=\frac{-\sqrt{3}(1+k^2)}{1-\sqrt{3}\,k}\quad\cdots\cdots②$$

とできる．

$y=f(x)$ の $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)\qquad\therefore\quad y=(3t^2-k)x-2t^3$$

よって，点O，P，Qにおける接線の方程式はそれぞれ

$$y=-kx \quad \cdots\cdots ⑤,\quad y=(3p^2-k)x-2p^3 \quad \cdots\cdots ⑥,\quad y=(3q^2-k)x-2q^3 \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑤，⑥を連立させて　$-kx=(3p^2-k)x-2p^3$　　$\therefore\quad x=\dfrac{2}{3}p$

⑤，⑦を連立させて　$-kx=(3q^2-k)x-2q^3$　　$\therefore\quad x=\dfrac{2}{3}q$

⑤，⑥，⑦のなす角がいずれも $\dfrac{\pi}{3}$ であることから，これら3直線によって囲まれる三角形は正三角形であり，

その一辺の長さは

$$\sqrt{1+(-k)^2}\left|\frac{2}{3}p-\frac{2}{3}q\right|=\frac{2}{3}\sqrt{1+k^2}\,|p-q|$$

よって，面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{1+k^2}\,|p-q|\right\}^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p-q)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p^2+q^2-2pq)$$

ここで①，②より

$$3p^2+3q^2=\frac{\sqrt{3}(1+k^2)\{(1-\sqrt{3}k)-(1+\sqrt{3}k)\}}{1-3k^2}=\frac{6k(1+k^2)}{3k^2-1}$$

$$\therefore\quad p^2+q^2=\frac{2k(1+k^2)}{3k^2-1} \quad \cdots\cdots ⑧$$

また，

$$3p^2\cdot 3q^2=\frac{-3(1+k^2)}{1-3k^2}=\frac{3(1+k^2)^2}{3k^2-1}$$

$$p^2q^2=\frac{(1+k^2)^2}{3(3k^2-1)} \qquad \therefore\quad pq=\pm\frac{1+k^2}{\sqrt{3(3k^2-1)}} \quad \cdots\cdots ⑨$$

よって，

$$M=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p^2+q^2+2|pq|),$$

$$m=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p^2+q^2-2|pq|)$$

であるから，$M=4m$ のとき

$$p^2+q^2+2|pq|=4(p^2+q^2-2|pq|)$$

$$3(p^2+q^2)=10|pq|$$

⑧，⑨より

$$\frac{6k(1+k^2)}{3k^2-1}=\frac{10(1+k^2)}{\sqrt{3(3k^2-1)}}$$

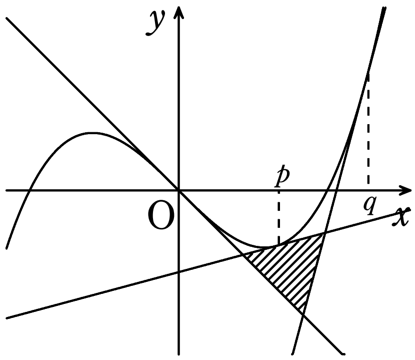
$$9k^2=25(3k^2-1) \qquad \therefore\quad k^2=\frac{25}{48}$$

$k>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから　$k=\sqrt{\dfrac{25}{48}}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}}{12}}$

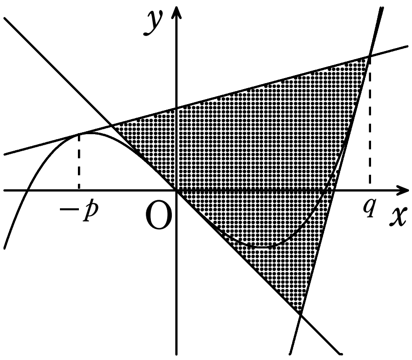
参考　S の最大値 M，最小値 m について．

S が最小値 m をとるのは $pq>0$，すなわち p，q が同符号となるとき（図１）であり，S が最大値をとるのは $pq<0$ であるとき，すなわち p，q が異符号となるとき（図２）であり，

（図１）$0<p<q$



（図２）$p<0<q$



$f'(p)=f'(-p)=3p^2-k$ であるから，最小値 m をとるときの三角形と最大値 M をとるときの三角形は相似であり，$M=4m$ となるとき，相似比から

$$p-q : p-(-q)=1:2$$

$$2(p-q)=p+q \qquad \therefore \quad p=3q$$

これを用いて k の値を求めることもできる．

第５問

複素数平面上の原点を中心とする半径１の円を C とする．複素数 α と C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対し， $w=(z-\alpha)^3$ とおく．
Pが C 上を動くときの点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡を D とする．

(1)　$\alpha=-3$ とし，w の偏角を θ とおく．P が C 上を動くとき， $\sin\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　α が次の条件を満たすように動く．

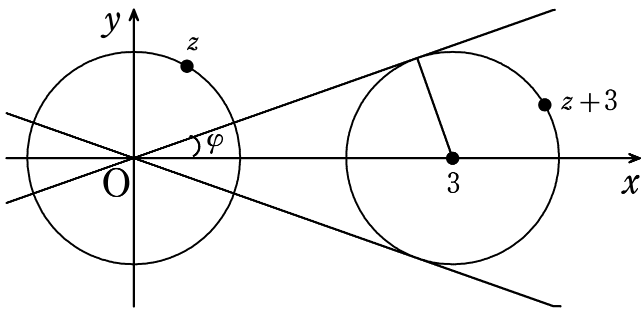
　条件：　D は実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点を持つ．

複素数平面上の点 $\mathrm{R}(\alpha)$ が動きうる範囲の面積を求めよ．

解説

(1)　$\alpha=-3$ より　$w=(z+3)^3$

$\mathrm{P}(z)$ は原点を中心とする半径１の円周上を動くから， $z+3$ は３を中心とする半径１の円周上を動く．



図のように φ をとると　$\sin\varphi=\dfrac{1}{3}$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{6}$

これを用いると $-\varphi\leqq\arg(z+3)\leqq\varphi$ のすべての値を $\arg(z+3)$ は取りうる．

よって

$$\theta=\arg w=\arg(z+3)^3=3\arg(z+3)$$

であるから

$$-3\varphi\leqq\theta\leqq3\varphi$$

$0<\varphi<\dfrac{\pi}{6}$ より $-\dfrac{\pi}{2}<-3\varphi<0$，$0<3\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\sin(-3\varphi)\leqq\sin\theta\leqq\sin3\varphi \qquad \therefore\quad -\sin3\varphi\leqq\sin\theta\leqq\sin3\varphi$$

ここで $\sin\varphi=\dfrac{1}{3}$ より，

$$\sin3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi=3\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{27}=\frac{23}{27}$$

よって， $\sin\theta$ がとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{23}{27}\leqq\sin\theta\leqq\dfrac{23}{27}}$

(2)　$z-\alpha$ は $-\alpha$ を中心とする半径１の円周上を動く．

$$z-\alpha=r(\cos p+i\sin p)\quad(r>0,\ 0\leqq p<2\pi)$$

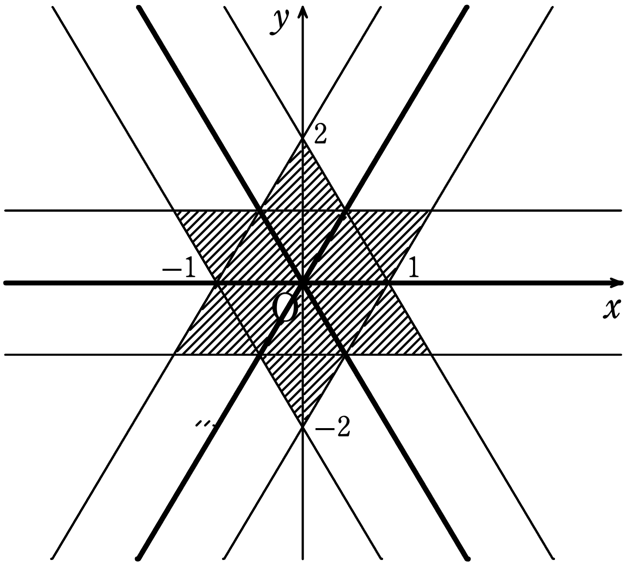
とおくと

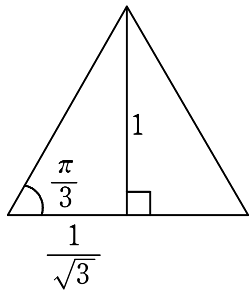
$$w=(z-\alpha)^3=r^3(\cos3p+i\sin3p)$$

よって，w が正の実数となるのは　$3p=0,\ 2\pi,\ 4\pi$　　　$\therefore\ \ p=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$　……①

w が負の実数となるのは　$3p=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi$　　$\therefore\ \ p=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$　……②

したがって，条件を満たすのは $z-\alpha$ で表される円が偏角が ① である半直線のいずれか 1 つと共有点をもち，かつ，偏角が ② である半直線のいずれか 1 つと共有点をもつときであるから，$-\alpha$ の存在範囲は次の図のようになる．





この領域は原点に関して対称であり，α は $-\alpha$ を原点に関して対称移動した点であるから，α の存在範囲も上の図の斜線部分に等しい．

これは一辺の長さが $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形 12 個分の面積であるから，求める面積は

$$12\times\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$$

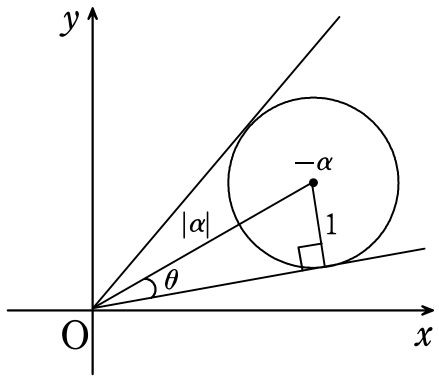
参考　α の存在範囲を図形的に把握できなければ，次のように考えるとよい．

$|\alpha|<1$ のとき，$z-\alpha$ が描く円は原点を内部に含むから，$w=(z-\alpha)^3$ が描く図形は条件を満たす．

$|\alpha|\geqq 1$ のとき，$\arg(-\alpha)=t\ \left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}\right)$ とおく．

また，図のように θ をとると，

$$\sin\theta=\frac{1}{|-\alpha|}=\frac{1}{|\alpha|},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$



このとき，$\arg(z-\alpha)=p$ とすると，

$t-\theta\leqq p\leqq t+\theta$

$\therefore\ \ 3(t-\theta)\leqq 3p\leqq 3(t+\theta)$　……①

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$0<3(t+\theta)<3\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi,$$

$$-\frac{3}{2}\pi<3(t-\theta)<\frac{\pi}{2}$$

であるから，条件を満たすのは ① に π が含まれるときで，

$$\pi\leqq 3(t+\theta)\qquad\therefore\ \ \theta\geqq\frac{\pi}{3}-t$$

$0<\dfrac{\pi}{3}-t\leqq\dfrac{\pi}{3}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\sin\theta\geqq\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right)$$

$$\frac{1}{|\alpha|}\geqq\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\qquad\therefore\quad |\alpha|\leqq\frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-t\right)}$$

図の対称性から，$\dfrac{\pi}{6}\leqq t<2\pi$ についても同様である．

以上より，$\mathrm{R}(\alpha)$ が動きうる範囲の面積は

$$12\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-t\right)}\right\}^2dt=6\left[\frac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-t\right)}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=6\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=4\sqrt{3}$$

第６問

n を正の整数とする．n の正の約数のうち，3 で割って 1 余るものの個数を $f(n)$，3 で割って 2 余るものの個数を $g(n)$ とする．

(1)　$f(2800)$，$g(2800)$ を求めよ．

(2)　$f(n) \geqq g(n)$ を示せ．

(3)　$g(n)=15$ であるとき，$f(n)$ がとりうる値を求めよ．

(解説)

以下の合同式は法を 3 とする．

(1)　$2800=2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ であるから，2800 の約数は

$$a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\quad b=0,\ 1,\ 2,\quad c=0,\ 1$$

として

$$2^a \cdot 5^b \cdot 7^c \equiv (-1)^a \cdot (-1)^b \cdot 1^c = (-1)^{a+b}$$

このうち，$f(n)$ となるのは $a+b$ が偶数，c が任意となるときであるから，

$$f(2800)=(3\times 2+2\times 1)\times 2=\mathbf{16}$$

また，$g(n)$ となるのは $a+b$ が奇数，c が任意となるときであるから，

$$f(2800)=(3\times 1+2\times 2)\times 2=\mathbf{14}$$

(2)　任意の自然数 n は，

$$p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv \cdots\cdots \equiv p_k = 1,\quad q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv \cdots\cdots \equiv q_l \equiv -1$$

となる素数を用いて

$$n=\left(p_1{}^{a_1} \cdot p_2{}^{a_2} \cdot p_3{}^{a_3} \cdot \cdots \cdot p_k{}^{a_k}\right) \cdot \left(q_1{}^{b_1} \cdot q_2{}^{b_2} \cdot q_3{}^{b_3} \cdot \cdots \cdot q_l{}^{b_l}\right) \cdot 3^c$$

と表せる．ただし，a_1，a_2，…，a_k，b_1，b_2，…，b_l，c は自然数である．

このとき n の約数は

$$\left(p_1{}^{\alpha_1} \cdot p_2{}^{\alpha_2} \cdot p_3{}^{\alpha_3} \cdot \cdots \cdot p_k{}^{\alpha_k}\right) \cdot \left(q_1{}^{\beta_1} \cdot q_2{}^{\beta_2} \cdot q_3{}^{\beta_3} \cdot \cdots \cdot q_l{}^{\beta_l}\right) \cdot 3^\gamma$$

　ただし，$0 \leqq \alpha_i \leqq a_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，$0 \leqq \beta_j \leqq b_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$，$0 \leqq \gamma \leqq c$

と表せる．

$$p_1{}^{\alpha_1} \cdot p_2{}^{\alpha_2} \cdot p_3{}^{\alpha_3} \cdot \cdots \cdot p_k{}^{\alpha_k} \equiv 1^{\alpha_1} \cdot 1^{\alpha_2} \cdot 1^{\alpha_3} \cdot \cdots \cdot 1^{\alpha_k} = 1\ ,$$

$$q_1{}^{\beta_1} \cdot q_2{}^{\beta_2} \cdot q_3{}^{\beta_3} \cdot \cdots \cdot q_l{}^{\beta_l} \equiv (-1)^{\beta_1} \cdot (-1)^{\beta_2} \cdot (-1)^{\beta_3} \cdot \cdots \cdot (-1)^{\beta_l} = (-1)^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_l}\ ,$$

$$3^\gamma \equiv 0\ (\gamma \geqq 1),\quad 3^0 \equiv 1$$

であるから，$\gamma=0$ かつ $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots\cdots+\beta_l$ が偶数のとき $f(n)$ の要素となり，奇数のとき $g(n)$ の要素となる．

$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_l)$ に対して，次のような条件をみたす変換を考えよう．

① $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_l$ の偶奇を入れ替える

② 2回変換を実行すると自身に戻る

このような変換が定義できる集合上では，$f(n)$ の要素と $g(n)$ の要素の1対1対応が作れるので，それらの要素の数は一致する．

(i) $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_l$ がすべて偶数であるとき

このとき，$(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_l)\fallingdotseq(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ の部分集合に対して，$\beta_j\fallingdotseq 0$ なる最小の j に対し，

$$\beta_j \ \rightarrow\ \beta_j+1,\ \beta_j \text{ が奇数}$$

$$\beta_j \ \rightarrow\ \beta_j-1,\ \beta_j \text{ が偶数}$$

を定義すると，①，② を満たす．

(ii) ある b_j が奇数であるとき

このとき，すべての $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_l)$ の集合に対して

$$\beta_j \ \rightarrow\ b_j-\beta_j$$

という変換を定義すると，①，② を満たす．

(i) の場合は，$(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_l)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ がすべて $f(n)$ の要素であるため，　$f(n)>g(n)$

特に，$k=0$ の場合は　$f(n)=g(n)+1$

(ii) の場合は　$f(n)=g(n)$

したがって，$f(n)\geqq g(n)$ が示された．（証明終了）

(3) (2) の結果より，

$$n=\left(p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot p_3^{a_3}\cdot\cdots\cdot p_k^{a_k}\right)\cdot\left(q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot q_3^{b_3}\cdot\cdots\cdot q_l^{b_l}\right)\cdot 3^c$$

について，

$$A=(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\cdots(a_k+1)$$

とすると，

$$f(n)=A\cdot f\left(q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot q_3^{b_3}\cdot\cdots\cdot q_l^{b_l}\right),$$

$$g(n)=A\cdot g\left(q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot q_3^{b_3}\cdot\cdots\cdot q_l^{b_l}\right)$$

が成り立つ．

$g(n)=15$ のとき

$$\left(A,\ g\left(q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot q_3^{b_3}\cdot\cdots\cdot q_l^{b_l}\right)\right)=(1,\ 15),\ (15,\ 1),\ (3,\ 5),\ (5,\ 3)$$

(2) より

$$f\left(q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot q_3^{b_3}\cdot\cdots\cdot q_l^{b_l}\right)=g\left(q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot q_3^{b_3}\cdot\cdots\cdot q_l^{b_l}\right)\text{，または}$$

$$f\left(q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot q_3^{b_3}\cdot\cdots\cdot q_l^{b_l}\right)=g\left(q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot q_3^{b_3}\cdot\cdots\cdot q_l^{b_l}\right)+1$$

が成り立つことから，$f(n)$ のとり得る値は

$$f(n)=15,\ 16,\ 30,\ 18,\ 20$$