解答速報　数学

医学部受験専門予備校 慧修会

2026年度　日本医科大学後期

【　講　評　】

例年通り，大問4題で出題された．出題形式にも変化はなかった．昨年の後期試験と比較すると，難易度，計算量共に同程度であった．5割を超える得点を目指したい．以下，大問ごとに述べる．

［Ⅰ］ 確率【標準】

円周上の3点間をさいころの目によって移動させる，典型的な確率の問題であった．漸化式の立式，一般項の立式のための誘導があり解きやすい．最後の小数計算が面倒であるが，完答したい問題である．

［Ⅱ］ 複素数平面【やや易】

1次分数変換による複素数平面上の軌跡に関する典型問題であった．問1の軌跡をミスなく正確に求めることができれば，それ以降は問題ないだろう．大問4題の中で一番解きやすい問題であるため，ここは確実に得点したい．

［Ⅲ］ 数列の極限(無限級数)／数Ⅲ微分法(導関数)【難】

問1は漸化式を解くだけである．解法が思いつかなければ，与えられた一般項を帰納法で証明しても良いだろう．問2，問3が難しい．問1がヒントにはなっているものの，結びつけるのが容易でなく，また，別の解法を用いる場合も発想しづらい．ここは得点出来なかった人が多いのではないだろうか．

［Ⅳ］ 数Ⅲ積分法(斜軸回転体の体積)／数列の極限(極限値の確定)【やや難】

問1，問3は斜軸回転体の体積を求める問題で，誘導形式になっているため解きやすい．問2は点 P_n が曲線上にあることを利用すれば，容易に示すことができる．問4は収束，発散が不確定な部分を抽出することができるかどうかがポイントで，極限計算にかなり慣れていないと難しい．差がつきそうな問題である．

【　解　答　】

［Ⅰ］

問1　アイ：$\frac{1}{4}$，ウエ：$\frac{1}{4}$，オカ：$\frac{1}{4}$，キク：$\frac{1}{4}$，ケコ：$\frac{1}{4}$，サシ：$\frac{1}{2}$，スセ：$\frac{1}{2}$，ソタ：$\frac{1}{4}$，チツ：$\frac{1}{4}$

問2　$a_{n+3}=\frac{1}{64}a_n+\frac{21}{64}$

問3　$a_{3n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n$

問4　$n=27$

［Ⅱ］

問1　解説参照

問2　$z=-1-i$（解説参照）

問3　$z=-1+i$，$\frac{-7+i}{5}$（解説参照）

［Ⅲ］

問1　解説参照

問2　$\frac{8}{\pi}-2$（解説参照）

問3　$\frac{20}{3}-\frac{64}{\pi^2}$（解説参照）

［Ⅳ］

問1　$d(x)=\frac{e^{-x}}{2}$，　$s(x)=\frac{\sqrt{3}\,e^{-x}+4x}{2}$

問2　$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{\sqrt{3}}{3}n\right)=0$（解説参照）

問3　$F(x)=\frac{\pi}{24}(\sqrt{3}\,e^{-3x}-6e^{-2x})$（解説参照）

問4　$k=\frac{2}{\sqrt{3}}$，　$\lim_{n\to\infty}e^{kn}V_n=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$　（解説参照）

【 解 説 】

[I]

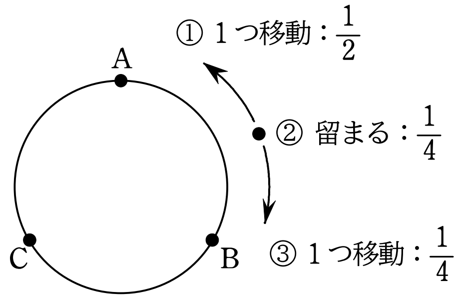
問 1

$n+1$ 回後に P が A にあるためには、

n 回後に A にあり，$n+1$ 回目に ② ，

n 回後に B にあり，$n+1$ 回目に ① ，

n 回後に C にあり，$n+1$ 回目に ③



が起きる必要があるので， $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}c_n$

同様に考えることで，

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{\mathbf{1}_{(\text{ア})}}{\mathbf{4}_{(\text{イ})}}a_n+\dfrac{\mathbf{1}_{(\text{ウ})}}{\mathbf{2}_{(\text{エ})}}b_n+\dfrac{\mathbf{1}_{(\text{オ})}}{\mathbf{4}_{(\text{カ})}}c_n \\ b_{n+1}=\dfrac{\mathbf{1}_{(\text{キ})}}{\mathbf{4}_{(\text{ク})}}a_n+\dfrac{\mathbf{1}_{(\text{ケ})}}{\mathbf{4}_{(\text{コ})}}b_n+\dfrac{\mathbf{1}_{(\text{サ})}}{\mathbf{2}_{(\text{シ})}}c_n \\ c_{n+1}=\dfrac{\mathbf{1}_{(\text{ス})}}{\mathbf{2}_{(\text{セ})}}a_n+\dfrac{\mathbf{1}_{(\text{ソ})}}{\mathbf{4}_{(\text{タ})}}b_n+\dfrac{\mathbf{1}_{(\text{チ})}}{\mathbf{4}_{(\text{ツ})}}c_n \end{cases}$$

問 2

$a_n+b_n+c_n=1$ であるから，問 1 より， $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+c_n)+\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{4}(1-b_n)+\frac{1}{2}b_n=\frac{b_n+1}{4}$

同様にすると， $b_{n+1}=\frac{c_n+1}{4}$，$c_{n+1}=\frac{a_n+1}{4}$

これらを用いると，

$$a_{n+3}=\frac{b_{n+2}+1}{4}=\frac{\frac{c_{n+1}+1}{4}+1}{4}=\frac{c_{n+1}+5}{16}=\frac{\frac{a_n+1}{4}+5}{16}=\boldsymbol{\frac{1}{64}a_n+\frac{21}{64}}$$

問 3

問 2 の漸化式より $a_{3n+3}=\frac{1}{64}a_{3n}+\frac{21}{64} \iff a_{3(n+1)}-\frac{1}{3}=\frac{1}{64}\left(a_{3n}-\frac{1}{3}\right)$

$\left\{a_{3n}-\frac{1}{3}\right\}$ は等比数列であり， $a_{3n}-\frac{1}{3}=\left(a_0-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{64}\right)^n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n$ $\quad\therefore\ a_{3n}=\boldsymbol{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n}$

問 4

問 3 と同様に考えると， $c_{3n}-\frac{1}{3}=\left(c_0-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{64}\right)^n=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n$ $\quad\therefore\ c_{3n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n$

問 2 より， $b_{3n+1}=\frac{c_{3n}+1}{4}=\frac{1}{4}\left\{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n\right\}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{64}\right)^n$

したがって， $|a_{3n}-b_{3n+1}|=\left|\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n-\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{64}\right)^n\right\}\right|=\frac{9}{12}\left(\frac{1}{64}\right)^n=\frac{3}{4\cdot 4^{3n}}=\frac{3}{4^{3n+1}}$

$\therefore\ |a_{3n}-b_{3n+1}|<\left(\frac{1}{3}\right)^{99} \iff \frac{3}{4^{3n+1}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{99} \iff 3^{100}<4^{3n+1}$

両辺の常用対数をとると，

$$\log_{10} 3^{100} < \log_{10} 2^{2(3n+1)} \iff 100\log_{10} 3 < 2(3n+1)\log_{10} 2 \iff \frac{100\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} < 3n+1$$

$$\iff 3n > \frac{100\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} - 1 = \frac{47.71}{0.6020} - 1 = 78.25\cdots$$

$$\therefore \quad n > 26.08\cdots$$

これを満たす最小の n は，　$n = \mathbf{27}$

[Ⅱ]

問 1

点 P(z) が O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円 C_1 上を動くことから，　$|z|=\sqrt{2}$　……①

$w=\dfrac{(-1+3i)z+2i}{2z+2}$ より，

$$(2z+2)w=(-1+3i)z+2i \iff (2w+1-3i)z=-2w+2i$$

$2w+1-3i=0$ とすると成り立たないから，　$2w+1-3i\fallingdotseq 0 \iff w\fallingdotseq\dfrac{-1+3i}{2}$　……②

このとき，　$z=\dfrac{-2w+2i}{2w+1-3i}$　……③

③ を ① に代入すると，

$$\left|\frac{-2w+2i}{2w+1-3i}\right|=\sqrt{2} \iff |2w-2i|=\sqrt{2}\,|2w+1-3i|$$

両辺を 2 乗して，

$$4(w-i)\overline{(w-i)}=2(2w+1-3i)\overline{(2w+1-3i)} \iff 2(w-i)(\overline{w}+i)=\{2w+(1-3i)\}\{2\overline{w}+(1+3i)\}$$

$$\iff 2w\overline{w}+2iw-2i\overline{w}+2=4w\overline{w}+2(1+3i)w+2(1-3i)\overline{w}+10$$

$$\iff w\overline{w}+iw-i\overline{w}+1=2w\overline{w}+(1+3i)w+(1-3i)\overline{w}+5$$

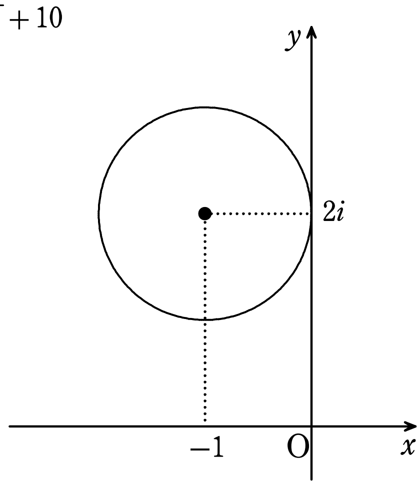
$$\iff w\overline{w}+(1+2i)w+(1-2i)\overline{w}=-4$$

$$\iff (w+1-2i)\overline{(w+1+2i)}=1$$

$$\iff |w-(-1+2i)|^2=1$$

$$\therefore\ |w-(-1+2i)|=1$$

よって，点 Q(w) が動く図形は，点 $-1+2i$ を中心とする，
半径 1 の円であり，これを複素数平面上に図示すると，
右図のようになる．
なお，この円上の点は，② を満たす．



問 2

座標平面に帰着させて考える．$w=x+yi$（x，y は実数）とすると，問 1 より，　$(x+1)^2+(y-2)^2=1$　……④

$$w^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi \quad \cdots\cdots ⑤$$

w^2 が実数のとき，　$2xy=0 \iff x=0$ または $y=0$

問 1 の図から，明らかに $x=0$ となることはない．④ と $y=0$ を満たすものは，　$(x,\ y)=(0,\ 2)$

よって，条件を満たすのは $w=2i$ であるから，このとき ③より，

$$z=\frac{-2\cdot 2i+2i}{2\cdot 2i+1-3i}=\frac{-2i}{1+i}=-i(1-i)=-1-i$$

問 3

問 2 と同様に考える．⑤より，w^2 が純虚数のとき，　$x^2-y^2=0$ かつ $2xy\fallingdotseq 0$

④ より後者は満たされるので，　$(x+y)(x-y)=0$　　$\therefore\ y=\pm x$

問 1 の図から，明らかに $y=x$ となることはない．$y=-x$ のとき，④ に代入すると，

$$(x+1)^2+(-x-2)^2=1 \iff x^2+3x+2=0 \iff (x+1)(x+2)=0 \quad \therefore\ x=-1,\ -2$$

よって，　$(x,\ y)=(-1,\ 1),\ (-2,\ 2)$

$w=-1+i$ のとき，④に代入すると，

$$z=\frac{-2(-1+i)+2i}{2(-1+i)+1-3i}=\frac{2}{-1-i}=-\frac{2}{1+i}=-(1-i)=-1+i$$

$w=-2+2i$ のとき，④に代入すると，

$$z=\frac{-2(-2+2i)+2i}{2(-2+2i)+1-3i}=\frac{4-2i}{-3+i}=-2\frac{2-i}{3-i}=-2\frac{(2-i)(3+i)}{10}=-\frac{7-i}{5}=\frac{-7+i}{5}$$

以上から，求める z は

$$z=-1+i\ ,\ \frac{-7+i}{5}$$

参考　問１の軌跡について

$$|2w-2i|=\sqrt{2}|2w+1-3i| \iff |w-i|=\sqrt{2}\left|w-\left(\frac{-1+3i}{2}\right)\right|$$

w の軌跡は i，$\dfrac{-1+3i}{2}$ を $\sqrt{2}:1$ に内分，外分する点を直径とする円を描く（アポロニウスの円）．

このことを用いても良いが，比や複素数がきれいな値でないため，計算はやや煩雑になる．

別解　問２の w^2 が実数である条件は，次のように処理してもよい．

w^2 が実数であるとき，　$w^2=\overline{w^2} \iff (w-\overline{w})(w+\overline{w})=0$ 　　$\therefore$ 　$w=\overline{w}$ または $w=-\overline{w}$

$w=\overline{w}$ のとき，w は実数であるから，問１の図より存在しない．

$w=\overline{w}$ のとき，w は純虚数または０であるから，問１の図より　$w=2i$

以下，本解答と同じ．

別解　問２の w^2 が純虚数である条件は，次のように処理してもよい．

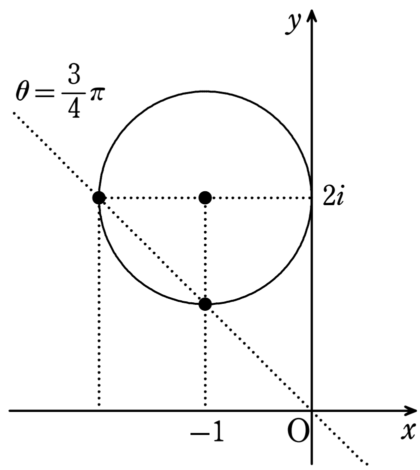
$w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ -\pi\leqq\theta<\pi)$ とおくと

$$w^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$$

$-\pi\leqq\theta<\pi$ より $-2\pi\leqq2\theta<2\pi$ であるから，w^2 が純虚数となるのは

$$2\theta=-\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore\ \theta=-\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$



よって，問１の図よりこれを満たすのは $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のときで，

$$w=-1+i,\ -2+2i$$

以下，本解答と同じ．

[Ⅲ]

問1

$C_n(x)=C_{n-1}(x)\cdot\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ の両辺に $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ をかけると,

$$\begin{aligned}C_n(x)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)&=C_{n-1}(x)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\\&=C_{n-1}(x)\cdot\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{x}{2^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot C_{n-1}(x)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

よって, $\left\{C_n\cdot\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right\}$ は等比数列であり,

$$\begin{aligned}C_n(x)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)&=C_0(x)\cdot\sin\left(\frac{x}{2^0}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\cos x\sin x}{2^n}\\&=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

$x\fallingdotseq 2^n l\pi$ より, $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\fallingdotseq 0$ であるから, $C_n(x)=\dfrac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$ (証明終)

問2

問1より,

$$\begin{aligned}C_n(x)&=\frac{\sin x\cos x}{2^n\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}=\frac{\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cos x}{2^{n-1}\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}=\frac{\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{2}\cos x}{2^{n-2}\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}\\&=\cdots\\&=\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)\cdot\cdots\cdot\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\cos x}{\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}\\&=\cos x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdot\cdots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\end{aligned}$$

両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\begin{aligned}\log|C_n(x)|&=\log\left|\cos x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdot\cdots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\\&=\log|\cos x|+\log\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\log\left|\left(\frac{x}{2^2}\right)\right|+\cdots+\log\left|\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\\&=\sum_{k=0}^{n}\log\left|\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|\end{aligned}$$

両辺を x で微分すると,

$$(\text{右辺})=\sum_{k=0}^{n}\frac{-\dfrac{1}{2^k}\sin\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}=-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

また,

$$\log|C_n(x)|=\log\left|\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}\right|=\log|\sin 2x|-(n+1)\log 2-\log\left|\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|$$

であるから,

$$(\text{左辺})=\left\{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\dfrac{1}{2^n}\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}\right\}=\frac{2}{\tan 2x}-\frac{1}{2^n\tan\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$$

よって, $$-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{2}{\tan 2x}-\frac{1}{2^n\tan\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n\tan\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}-\frac{2}{\tan 2x}\quad\cdots\cdots①$$

したがって, $x=\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2^3}$ とすると $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}-\frac{2}{\tan\dfrac{\pi}{4}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+3}}}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}-2\right\}$$

$$=\frac{8}{\pi}-2$$

問3

問2の①式の両辺を x で微分すると

$$(\text{右辺})=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\dfrac{1}{2^k}}{\cos^2\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\left\{1+\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right\}=\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right\}+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$(\text{右辺})=-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\dfrac{1}{2^n}}{\sin^2\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}+\frac{4}{\sin^2 2x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$$

よって, $$\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right\}+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right\}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$x=\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2^3}$ とすると $$\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}=\frac{4}{\sin^2\dfrac{\pi}{4}}-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$=8-\frac{64}{\pi^2}\cdot\left\{\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+3}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}\right\}^2-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$0<\dfrac{1}{4}<1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left[8-\frac{64}{\pi^2}\cdot\left\{\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}\right\}^2-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]$$

$$=8-\frac{64}{\pi^2}\cdot 1^2-\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{20}{3}-\frac{64}{\pi^2}}$$

別解　問 1 は数学的帰納法で示してもよい．

すべての 0 以上の整数 n について，$C_n(x)=\dfrac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$　……(*)　となることを，数学的帰納法で証明する．

$C_0(x)=\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}=\cos x$ であるから，$n=0$ のとき (*) は成り立つ．

$n=k$ (k は 0 以上の整数) のとき，(*) が成り立つと仮定すると，漸化式により

$$C_{k+1}(x)=C_k(x)\cdot\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)=\frac{\sin 2x}{2^{k+1}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}\cdot\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$$

$$=\frac{\sin 2x}{2^{k+2}\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}\cdot\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)=\frac{\sin 2x}{2^{k+2}\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}$$

となり，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上により，すべての 0 以上の整数 n について，(*) が成り立つ．

別解　問 2 は問 1 の誘導を無視して解くこともできる．

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ より，　$\dfrac{1}{\tan 2\theta}=\dfrac{1}{2\tan\theta}-\dfrac{\tan\theta}{2}$　$\Leftrightarrow$　$\tan\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{2}{\tan 2\theta}$

$\theta=\dfrac{\pi}{2^{k+3}}$ とすると，　$\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{k+3}}\right)=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)}-\dfrac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}$

両辺を 2^k で割ると，　$\dfrac{1}{2^k}\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{k+3}}\right)=\dfrac{1}{2^k\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)}-\dfrac{1}{2^{k-1}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}$

よって，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{2^k\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)}-\frac{1}{2^{k-1}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}\right\}=\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}-\frac{1}{2^{-1}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}-2$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}-2\right\}=\boldsymbol{\frac{8}{\pi}-2}$$

別解　問3も問1，問2の誘導を無視して解くことができる．

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ より　$\tan^2 2\theta = \dfrac{4\tan^2\theta}{(1-\tan^2\theta)}$

$$\frac{4}{\tan^2 2\theta} = \frac{1}{\tan^2\theta} - 2 + \tan^2\theta \qquad \therefore\quad \tan^2\theta = 2 + \frac{4}{\tan^2 2\theta} - \frac{1}{\tan^2\theta}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2^{k+3}}$ とすると　$\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{k+3}}\right) = 2 + \dfrac{4}{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{k+2}}\right)} - \dfrac{1}{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{k+3}}\right)}$

両辺を 4^k で割ると　$\dfrac{1}{4^k}\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{k+3}}\right) = \dfrac{2}{4^k} + \dfrac{1}{4^{k-1}\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{k+2}}\right)} - \dfrac{1}{4^k\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{k+3}}\right)}$

よって，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\} &= \sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{2}{4^k} + \frac{1}{4^{k-1}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)} - \frac{1}{4^k\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)}\right\} \\ &= \frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4^{-1}\tan^2\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4^n\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)} \\ &= \frac{8}{3} + 4 - \left\{\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}\right\}^2 \cdot \frac{64}{\pi^2}\end{aligned}$$

したがって，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\} = \mathbf{\frac{20}{3} - \frac{64}{\pi^2}}$

[Ⅳ]

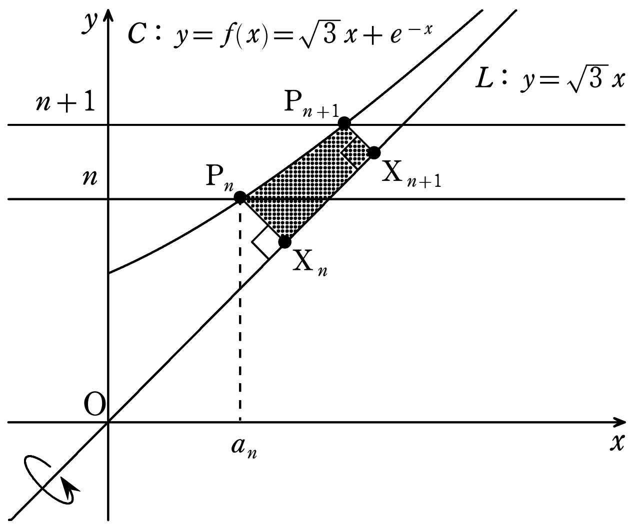
問１

$$f'(x)=\sqrt{3}-e^{-x}>\sqrt{3}-1>0 \quad (\because\ x\geqq 0)$$

よって，$y=f(x)$ は単調に増加し，

$$\lim_{x\to\infty}|f(x)-\sqrt{3}x|=\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$$

から，L は C の漸近線である．よって，C と L の位置関係は右図のようになる．



C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ について，

$$p>0,\ \ q>0,\ \ q>\sqrt{3}p$$

であり，L：$\sqrt{3}x-y=0$ であるから，

$$\overline{\mathrm{PX}}=\frac{|\sqrt{3}p-q|}{\sqrt{3+1}}=\frac{q-\sqrt{3}p}{2},$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OX}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{PX}}^2}\\&=\sqrt{(p^2+q^2)-\frac{q^2-2\sqrt{3}pq+3p^2}{4}}\\&=\sqrt{\frac{3q^2+2\sqrt{3}pq+p^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}q+p}{2}\end{aligned}$$

$p=x$，$q=f(x)$ とすると，

$$d(x)=\frac{f(x)-\sqrt{3}x}{2}=\boldsymbol{\frac{e^{-x}}{2}},\quad s(x)=\frac{\sqrt{3}f(x)+x}{2}=\frac{3x+\sqrt{3}e^{-x}+x}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}e^{-x}+4x}{2}}$$

問２

$\mathrm{P}(a_n,\ n)$ は C 上の点であるから，　$n=\sqrt{3}a_n+e^{-a_n}$　　$\therefore\ \ a_n-\dfrac{\sqrt{3}}{3}n=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-a_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{\sqrt{3}}{3}n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-a_n}\right)=\boldsymbol{0}$

問３

問１の $d(x)$，$s(x)$ を用いると，

$$V_n=\int_{\overline{\mathrm{OX}_n}}^{\overline{\mathrm{OX}_{n+1}}}\pi\overline{\mathrm{PX}}^2\,ds(x)=\pi\int_{\overline{\mathrm{OX}_n}}^{\overline{\mathrm{OX}_{n+1}}}\pi\{d(x)\}^2\,ds(x)$$

$ds(x)=\dfrac{-\sqrt{3}e^{-x}+4}{2}dx$，

$s(x)$	$\overline{\mathrm{OX}_n}\to\overline{\mathrm{OX}_{n+1}}$
x	$a_n\to a_{n+1}$

であるから，

$$\begin{aligned}V_n&=\int_{a_n}^{a_{n+1}}\pi\cdot\frac{e^{-2x}}{4}\cdot\frac{-\sqrt{3}e^{-x}+4}{2}dx=\int_{a_n}^{a_{n+1}}\pi\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx\\&=\left[\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{24}e^{-3x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right)\right]_{a_n}^{a_{n+1}}\end{aligned}$$

よって，　$\boldsymbol{F(x)=\dfrac{\pi}{24}(\sqrt{3}e^{-3x}-6e^{-2x})}$

問4

問3より，

$$V_n=\frac{\pi}{24}\left\{\sqrt{3}\left(e^{-3a_{n+1}}-e^{-3a_n}\right)-6\left(e^{-2a_{n+1}}-e^{-2a_n}\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{24}\left[\sqrt{3}\,e^{-3a_n}\left\{e^{-3(a_{n+1}-a_n)}-1\right\}-6e^{-2a_n}\left\{e^{-2(a_{n+1}-a_n)}-1\right\}\right]$$

$$=\frac{\pi}{24}e^{-2a_n}\left[\sqrt{3}\,e^{-a_n}\left\{e^{-3(a_{n+1}-a_n)}-1\right\}-6\left\{e^{-2(a_{n+1}-a_n)}-1\right\}\right]$$

$$\therefore\quad e^{kn}V_n=\frac{\pi}{24}e^{kn-2a_n}\left[\sqrt{3}\,e^{-a_n}\left\{e^{-3(a_{n+1}-a_n)}-1\right\}-6\left\{e^{-2(a_{n+1}-a_n)}-1\right\}\right]\qquad\cdots\cdots①$$

ここで，$\mathrm{P}_n(a_n,\ n)$，$\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ n+1)$ は L 上の点であるから，

$$n=\sqrt{3}\,a_n+e^{-a_n}\quad\cdots\cdots②,\quad n+1=\sqrt{3}\,a_{n+1}+e^{-a_{n+1}}\quad\cdots\cdots③$$

③−② より，

$$1=\sqrt{3}(a_{n+1}-a_n)+e^{-a_{n+1}}-e^{-a_n}\qquad\therefore\quad a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{-a_{n+1}}-e^{-a_n}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{-a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{-a_{n+1}}=0$ であるから，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{3}\,e^{-a_n}\left\{e^{-3(a_{n+1}-a_n)}-1\right\}-6\left\{e^{-2(a_{n+1}-a_n)}-1\right\}\right]=6\left(1-e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)\qquad\cdots\cdots④$$

① と ④ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{kn}V_n$ が正の値に収束するためには，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{kn-2a_n}$ が正の値に収束すればよい．

② より $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(n-e^{-a_n}\right)$ であるから，

$$kn-2a_n=kn-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(n-e^{-a_n}\right)=\left(k-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)n-\frac{2e^{-a_n}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}e^{kn-2a_n}=\begin{cases}\infty & \left(k>\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ \text{のとき}\right)\\ 1 & \left(k=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ \text{のとき}\right)\\ 0 & \left(k<\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ \text{のとき}\right)\end{cases}$$

以上と ①，④ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{kn}V_n$ の極限値が正となる k は $k=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であり，このとき，

$$\lim_{n\to\infty}e^{kn}V_n=\frac{\pi}{24}\cdot1\cdot6\left(1-e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$$